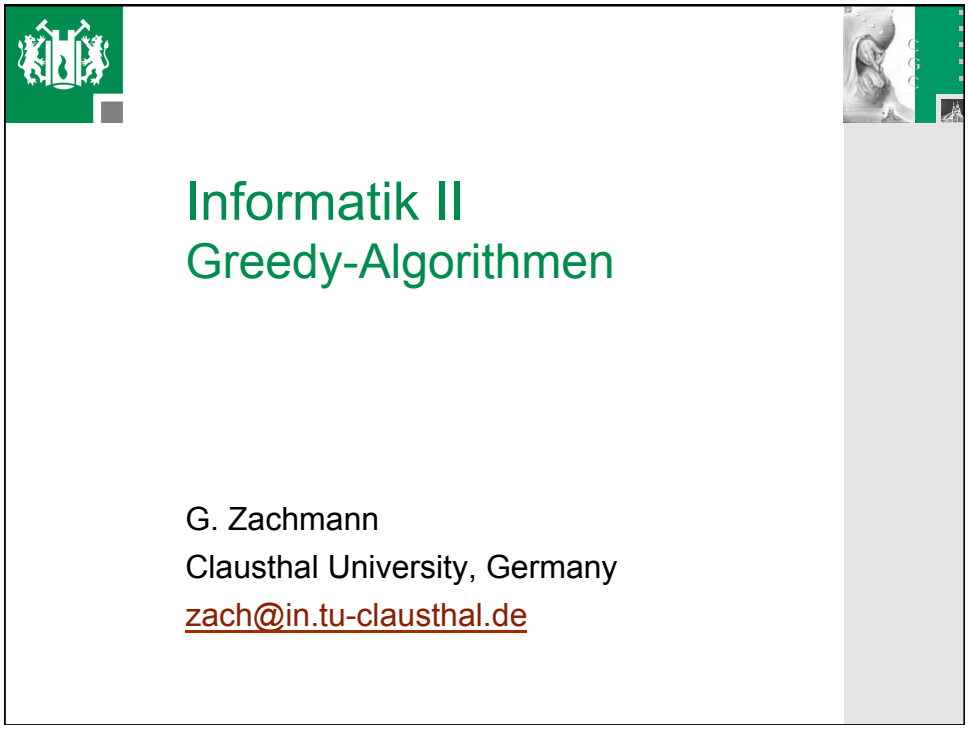


Informatik II
Greedy-Algorithmen

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

Erinnerung: Dynamische Programmierung

- Zusammenfassung der grundlegenden Idee:
  - Optimale Sub-Struktur: optimale Lösung des Problems besteht aus optimalen Lösungen der Unterprobleme
  - Sich überschneidende Unterprobleme: insgesamt wenige Unterprobleme, viele wiederkehrende Instanzen dieser Unterprobleme
  - Löse bottom-up: erstelle Tabelle mit gelösten Unterproblemen, die zur Lösung größerer benötigt werden
- Variationen:
  - „Tabelle“ kann 3-dimensional, dreieckig, ein Baum usw. sein
  - Bottom-Up oder Top-Down (Memoization)

Greedy-Algorithmen

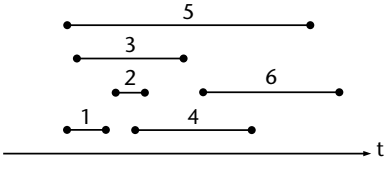
- "Greedy" = gierig
- Grundidee:
  - Konstruiere Lösung iterativ (keine Rekursion)
  - Wähle in jedem Schritt die am besten erscheinende Alternative
  - Eine Entscheidung wird nie revidiert ("blicke nicht zurück")
  - Die Hoffnung: eine *lokal* optimale Lösung führt zu einer *global* optimalen Lösung
- Dynamische Programmierung kann "Overkill" sein, Greedy-Algorithmen sind oft einfacher zu implementieren
- Greedy-Algorithmen sind nicht immer korrekt / optimal / gut

Das Activity-Selection-Problem (ASP)

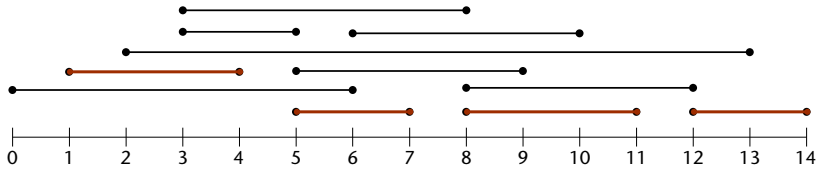
- Beispiel: in einem Vergnügungspark das "Meiste mitnehmen"
  - Eine Karte ermöglicht das Benutzen aller Attraktionen
  - Attraktionen starten und enden zu unterschiedlichen Zeiten
  - Ziel: so viele Attraktionen wie möglich besuchen (ein anderes Ziel wäre, so viel Zeit wie möglich in Attraktionen zu verbringen)

⇒Activity-Selection-Problem

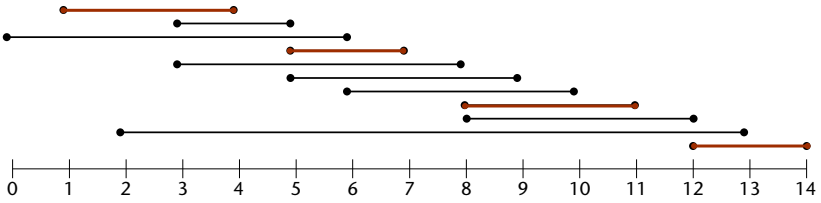
- Formal: sei $S = \{ (s_i, f_i) \mid i = 1 \ldots n \}$ eine Menge von n Aktivitäten
  - s_i / f_i = Startzeit / Endzeit von Aktivität i
  - Aufgabe: finde größte Menge $A \subseteq S$ mit kompatiblen Aktivitäten
  - OBdA sei $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$
    - Falls nicht: sortiere Aktivitäten in $O(n \log n)$ oder $O(n)$ gemäß f_i



Beispiel



Wieviel Aktivitäten können ausgeführt werden?



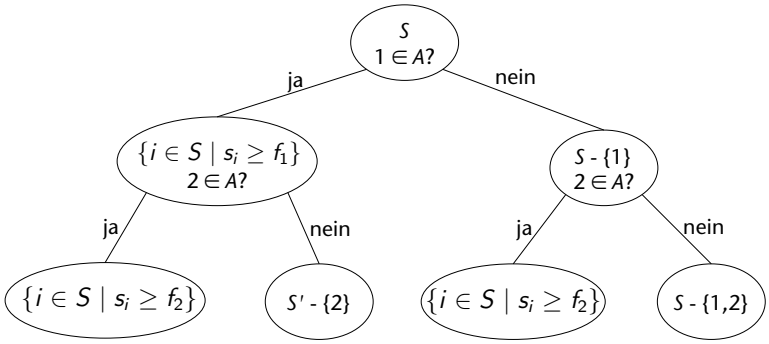
Wie lässt sich die Korrektheit beweisen?

Die optimale Unterstruktur

- Behauptung:
  Sei A eine optimale Lösung und k die minimale Aktivität in A (d.h. genau die mit kleinstem f_k), dann ist $A \setminus \{k\}$ eine maximale Lösung für $S' = \{i \in S \mid s_i \geq f_k\}$
- In Worten: wenn Aktivität $a_1=(s_k,f_k) \in S$ (richtig) gewählt ist, reduziert sich das Problem darauf, die maximale Lösung für diejenigen Aktivitäten $S' \subseteq S$ zu finden, die zu Aktivität a_1 "passen"
- Beweis:
  - Ann.: wir finden B = maximale Lösung zu S' mit $|B| > |A \setminus \{k\}|$
  - Dann passt Aktivität k auch zu B, und $B \cup \{k\}$ ist maximale Lösung zu S
  - $|B \cup \{k\}| > |A|$
  - A war nicht maximale Lösung

Wiederkehrende Unterprobleme

- Betrachte den rekursiven Algorithmus, der alle verträglichen Untermengen untersucht, um die maximale Menge zu finden:



- Beachte die sich wiederholenden Unterprobleme:
- Dynamische Programmierung? Memoisierung? Ja, aber …

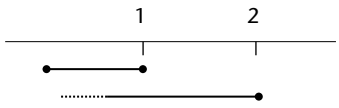
- Das Actitity-Selection-Problem zeigt auch die Greedy-Choice-Eigenschaft:

  Lokal optimale Auswahl ⇒ global optimale Lösung

➔Lemma:

wenn S ein, nach der Endzeit sortiertes, Activity-Selection-Problem ist, dann ex. eine optimale Lösung $A \subseteq S$, so daß $\{ (s_1,f_1) \} \in A$

- Beweisskizze:
  - Wenn eine optimale Lösung B existiert, die $\{ (s_1,f_1) \}$ nicht enthält, kann die erste Aktivität in B (z.B. (s_2,f_2)) immer durch (s_1,f_1) ersetzt werden
  - Gleiche Anzahl an Aktivitäten, also immer noch optimal



Ein greedy Algorithmus für das ASP

- Eigentlicher Algorithmus ist einfach:
  1. Sortiere Aktivitäten nach ihrer Endzeit f_i
  2. Lege die erste Aktivität fest (also (s_1,f_1), d.h. diejenige, die am frühesten wieder endet)
  3. Entferne alle Aktivitäten aus der sortierten Liste, die vor der Endzeit von f_1 starten (also nicht kompatibel sind)
  4. Wiederhole, bis keine Aktivitäten mehr übrig sind
- Intuition ist noch einfacher: nimm immer diejenige Aktivität mit der geringsten Dauer, die gerade als nächstes beginnt

- Der Algorithmus als Python-Programm:

```
sortiere die Arrays s & f bzgl f[i]
A = [ (s[0], f[0]) ]   # solution array
i = 0                  # = last finished activity
for k in range( 1, n ):
    if s[k] >= f[i]:
        # found next compatibel act.
        A.append( (s[k],f[k]) )
        i = k
return A
```

Erinnerung: das Knapsack-Problem

- Das 0-1-Knapsack-Problem:
  - Wähle aus n Gegenständen, wobei der i-te Gegenstand den Wert v_i und das Gewicht w_i besitzt
  - Maximiere den Gesamtwert bei vorgegebenem Höchstgewicht W
    - w_i und W sind Ganzzahlen
    - "0-1": jeder Gegenstand muß komplett genommen oder dagelassen werden
- Abwandlung: fraktionales Knapsack-Problem (*fractional KP*)
  - Man kann Anteile von Gegenständen wählen
  - Z.B.: Goldbarren beim 0-1-Problem und Goldstaub beim fraktionalen Problem

Das fraktionale Rucksack-Problem

- Gegeben: n Gegenstände, i-ter Gegenstand hat Gewicht w_i und Wert v_i, Gewichtsschranke W
- Gesucht:

$$q_1, \ldots, q_n \in [0,1] \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} q_i w_i \leq W$$

$$\text{und maximalem Wert } \sum_{i=1}^{n} q_i v_i$$

Der Algorithmus

```
# Input: Array G enthält Instanzen der Klasse Item
#        mit G[i].w = Gewicht und G[i].v = Wert
def fract_knapsack( G, w_max ):
    sortiere G absteigend nach (G[i].v / G[i].w)
    w = 0          # = bislang "belegtes" Gesamtgewicht
    for i in range( 0, len(G) ):
        if G[i].w <= w_max - w:
            q[i] = 1
            w += G[i].w
        else:
            q[i] = (w_max - w) / G[i].w
            break          # w_max ist ausgeschoepft
    return q
```

- Aufwand: $O(n) + \underbrace{O(n \log n)}_{\text{Sortieren}}$

Korrektheit

- Hier nur die Beweisidee:
- Der Greedy-Algorithmus erzeugt Lösungen der Form
  (1, …, 1, q_i, 0, …, 0)
- Ann.: es existiert eine bessere Lösung (q'_1, …, q'_m);
  diese hat die Form
  (1, …, 1, q'_j, …, q'_k, 0, …, 0)
- Zeige, daß man aus dieser Lösung eine andere Lösung (q''_1, …, q''_m) konstruieren kann, die dasselbe Gewicht hat, aber größeren Wert, und mehr 1-en oder mehr 0-en

- Achtung: Der Greedy-Algorithmus funktioniert nicht für das 0-1-Rucksack-Problem
- Gegenbeispiel: $W = 50$

Gegenstand	Gewicht	Wert	v_i / w_i
1	10	60	6
2	20	100	5
3	30	120	4

  - Greedy $\rightarrow 1 \times G_1 + 1 \times G_2$
  - Optimal $\rightarrow 1 \times G_2 + 1 \times G_3$

Elemente der Greedy-Strategie

- Die Greedy-Choice-Eigenschaft: global optimale Lösung kann durch lokal optimale (greedy) Auswahl erreicht werden
- Die optimale (Greedy-)Unterstruktur:
  - Eine optimale Lösung eines Problems enthält eine optimale Lösung eines Unterproblems, und diese Teillösung besteht aus 1 Element weniger als die Gesamtlösung
  - M.a.W.: es ist möglich zu zeigen: wenn eine optimale Lösung A Element s_i enthält, dann ist $A' = A \setminus \{s_i\}$ eine optimale Lösung eines kleineren Problems (ohne s_i und evtl. ohne einige weitere Elemente)
    - Bsp. ASP: $A \setminus \{k\}$ ist optimale Lösung für S'

- Optimale (Greedy-)Unterstruktur (Fortsetzung):
  - Man muß nicht alle möglichen Unterprobleme durchprobieren (wie bei Dyn.Progr.) — es genügt, das "nächstbeste" Element in die Lösung aufzunehmen, wenn man nur das richtige lokale(!) Kriterium hat
    - Bsp. ASP: wähle "vorderstes" kompatibles f_i
  - Möglicherweise ist eine Vorbehandlung der Eingabe nötig, um die lokale Auswahlfunktion effizient zu machen
    - Bsp. ASP: sortiere Aktivitäten nach Endzeit f_i

Allgemeine abstrakte Formulierung des Greedy-Algos

- Die Auswahl-Funktion basiert für gewöhnlich auf der Zielfunktion; sie können identisch sein; oft gibt es mehrere plausible Fkt.en

```
# C = Menge aller Kandidaten
# select = Auswahlfunktion
S = []          # = Lösung = Teilmenge von C
while not solution(S) and C != []:
    x = select(C)          # maximiert Zielfunktion
    C = C \ x
    if feasible(S,x):      # is x compatible with S?
        S += x
If S != []:
  return S
else:
  return "keine Lösung"
```

- Beispiel ASP:
  - Zielfunktion = Anzahl Aktivitäten (Max gesucht)
  - Auswahl-Funktion (**`select`**) = kleinstes $f_i \in S'$

Scheduling in (Betriebs-) Systemen

- Ein einzelner Dienstleister (ein Prozessor, ein Kassierer in einer Bank, usw.) hat n Kunden zu bedienen
- Die Zeit, die für jeden Kunden benötigt wird, ist vorab bekannt: Kunde i benötigt die Zeit t_i, $1 \le i \le n$
- Ziel:
  - Gesamtverweildauer

$$T = \sum_{i=1}^{n} (\text{ Zeit im System für Kunde } i)$$

aller Kunden im System minimieren

Beispiel

- Es gibt 3 Kunden mit $t_1 = 5$, $t_2 = 10$, $t_3 = 3$

Reihenfolge			T		
1	2	3	5 + (5 + 10) + (5 + 10 + 3)	= 38	
1	3	2	5 + (5 + 3) + (5 + 3 + 10)	= 31	
2	1	3	10 + (10 + 5) + (10 + 5 + 3)	= 43	
2	3	1	10 + (10 + 3) + (10 + 3 + 5)	= 41	
3	1	2	3 + (3 + 5) + (3 + 5 + 10)	= 29	← optimal
3	2	1	3 + (3 + 10) + (3 + 10 + 5)	= 34	

Algorithmenentwurf

- Betrachte einen Algorithmus, der den optimalen Schedule Schritt für Schritt erstellt
- Angenommen, nach der Bedienung der Kunden $i_1, \ldots, i_m$ ist Kunde j an der Reihe; die Zunahme von T auf dieser Stufe ist

$$t_{i_1} + \ldots + t_{i_m} + t_j$$

- Um diese Zunahme zu minimieren, muß nur t_j minimiert werden
- Das legt einen einfachen Greedy-Algorithmus nahe: füge bei jedem Schritt denjenigen Kunden, der die geringste Zeit benötigt, dem Schedule hinzu (→ "*shortest job first*")
- Behauptung: Dieser Algorithmus ist immer optimal

Optimalitätsbeweis

- Sei $I = (i_1, \ldots, i_n)$ eine Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$
- Werden die Kunden in der Reigenfolge I bedient, dann ist die Gesamtverweildauer für alle Kunden zusammen

$$\begin{aligned} T &= t_{i_1} + (t_{i_1} + t_{i_2}) + (t_{i_1} + t_{i_2} + t_{i_1}) + \cdots \\ &= n t_{i_1} + (n-1) t_{i_2} + (n-2) t_{i_1} + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{n} (n - k + 1) t_{i_k} \end{aligned}$$

- Jetzt nehmen wir an, daß in I zwei Zahlen *a*, *b* gefunden werden können, mit $a < b$ und $t_{i_a} > t_{i_b}$
- Durch Vertauschung dieser beiden Kunden ergibt sich eine neue Bedienungsreihenfolge I', die besser ist, weil

$$T(I) = (n-a+1)t_{i_a} + (n-b+1)t_{i_b} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq a,b}}^{n} (n-k+1)t_{i_k}$$

$$T(I') = (n-a+1)t_{i_b} + (n-b+1)t_{i_a} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq a,b}}^{n} (n-k+1)t_{i_k}$$

$$\begin{aligned} T(I) - T(I') &= (n-a+1)(t_{i_a} - t_{i_b}) + (n-b+1)(t_{i_b} - t_{i_a}) \\ &= (b-a)(t_{i_a} - t_{i_b}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Reihenfolge	1	...	a	...	b	...	n
bedienter Kunde	i_1	...	i_a	...	i_b	...	i_n
Bedienzeit	t_{i_1}	...	t_{i_a}	...	t_{i_b}	...	t_{i_n}
nach Austausch und von t_{i_a} und t_{i_b}	↓		✕		✕		↓
Bedienzeit	t_{i_1}	...	t_{i_b}	...	t_{i_a}	...	t_{i_n}
bedienter Kunde	i_1	...	i_b	...	i_a	...	i_n

Das SMS-Aufkommen der letzten Jahre

- $1.5 \cdot 10^{12}$ SMS (text messages) im Jahr 2009 allein in den USA
  - Annualized Total Wireless Revenues = $ 152.6 Milliarden [USA, 2009]
- $23 \cdot 10^{9}$ text messages in one week in China around (Chinese) New Year 2010
- $9.6 \cdot 10^{9}$ text messages in UK im Dez. 09

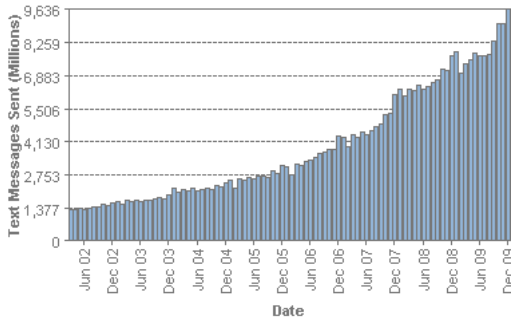
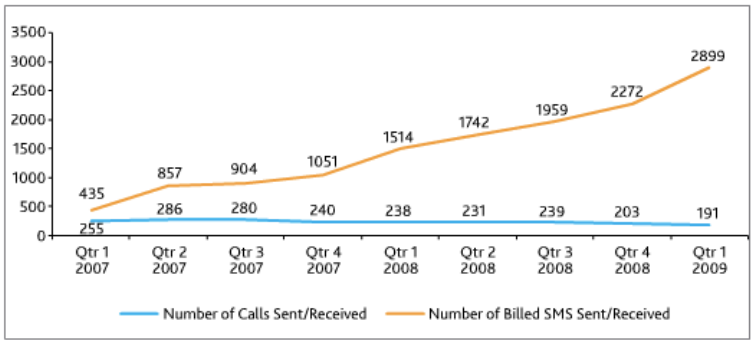


Figure 12: Average Number of Monthly Texts and Phone Calls—U.S. Mobile Teens 13–17



Source: The Nielsen Company

- Fazit: eine gute Kodierung ist sehr wichtig
  - "Gut" = Kodierung, die Bandbreite spart

Kodierung und Kompression

- Kodierung = Konvertierung der Darstellung von Information in eine andere Darstellung
  - Beispiel: Schriftzeichen sind ein Code, ASCII ein anderer Code
- Eine (von vielen) Aufgaben der Kodierung: platzsparende Speicherung von Information (Kompression)
- *Fixed-length code* = konstante Zahl von Bits pro Zeichen (z.B. ASCII)
- Bessere Idee: Kodiere einzelne Zeichen durch Code-Wörter mit variabler Länge (*variable-length code*)
  - Häufig auftretende Eingabewörter werden mit einem kurzen Code dargestellt
  - Seltene Eingabewörter bekommen ein längeres Code-Wort

Beispiel Morsecode

- Morsecode kodiert Buchstaben in Abhängigkeit der Häufigkeit

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
•–	–•••	–•–•	–••	•	••–•	––•	••••	••	•–––	–•–	•–••	––

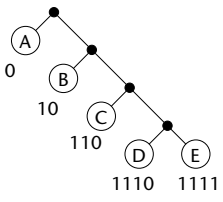
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
–•	–––	•––•	––•–	•–•	•••	–	••–	•••–	•––	–••–	–•––	––••

- Alphabet = drei Zeichen: •, –, □ (Pause)
- HALLO → •••• □ •– □ •–•• □ •–•• □ –––
- Die Pause ist ein wichtiges Zeichen:
  •••••–•–•••–••––– → EEEEETETEEETEETTT
  •••••–•–•••–••––– → ISTRERAM
  •••••–•–•••–••––– → HRBXM
  •••••–•–•••–••––– → IIAAIAIO … usw.
- Frage: gibt es Codes ohne Pause-Zeichen (= Leerzeichen), die trotzdem eindeutig decodiert werden können? (und kurz sind!)

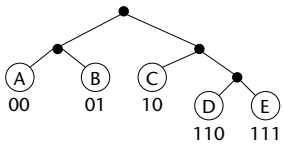
Eindeutige Codes

- Definition der Fano-Bedingung:
  Eine Kodierung besitzt die Fano-Eigenschaft ⇔
  kein Code-Wort ist Präfix eines anderen Code-Wortes
- Solche Codes heißen *prefix codes*
- Idee: betrachte Eingabewörter als Blätter eines Baumes
- Ein Code-Wort entspricht dem Pfad von der Wurzel zum Blatt
  - Verzweigung zum linken Sohn → „0“
  - Verzweigung zum rechten Sohn → „1“
- Erfüllt offensichtlich die Fano-Bedingung
- Länge eines Code-Wortes = Tiefe des entsprechenden Blattes
  - Ziel ist also: häufige Zeichen möglichst weit oben im Baum ansiedeln

- Beispiel: Σ = {A, B, C, D, E}, Text = `AABAACDAAEABACD`



00100011011100011101001101110
→ 30 bits



000001000010110000011100010010110
→ 33 bits

- Bemerkung: jeder beliebige Baum mit M Blättern kann benutzt werden, um jeden beliebigen String mit M verschiedenen Zeichen zu kodieren:
  - Die Darstellung als Binär-Baum mit einer Annotation der Zweige mit "0" bzw. "1" garantiert, daß kein Code-Wort Präfix eines anderen ist
  - Somit läßt sich die Zeichenfolge unter Benutzung des Baumes auf eindeutige Weise decodieren
  - Der Algorithmus: bei der Wurzel beginnend bewegt man sich entsprechend den Bits der Zeichenfolge im Baum abwärts; jedesmal, wenn ein Blatt angetroffen wird, gebe man das zu diesem Knoten gehörige Zeichen aus und beginne erneut bei der Wurzel

Die Huffman-Kodierung

- Lemma: Ein optimaler Baum zur Kodierung ist ein voller Baum, d.h., jeder innere Knoten hat genau 2 Kinder
- Beweis durch Widerspruch (Übungsaufgabe)

→ Sei Σ das Alphabet, dann hat der Baum $|\Sigma|$ viele Blätter (klar) und $|\Sigma|$-1 innere Knoten (s. Kapitel über Bäume)

- Gegeben: String $S = s_1 \ldots s_n$ über Σ.
  Sei $H_S(c)$ = absolute Häufigkeit des Zeichens c im String S
  Sei $d_T(c)$ = Tiefe von c im Baum T = Länge des Codewortes von c
- Anzahl Bits zur Kodierung von S mittels Code T ist

$$B_T(S) = \sum_{c \in \Sigma} H_S(c) d_T(c)$$

- Im folgenden: arbeite mit der mittleren Codewort-Länge, gemessen über alle möglichen (sinnvollen!) Texte der Sprache (z.B. Deutsch)

$$B(T) = \frac{1}{\text{Länge aller Texte}} B_T(\text{alle Texte})$$

- Anders geschrieben:

$$B(T) = \sum_{c \in \Sigma} h_S(c) d_T(c)$$

wobei $h_S(c)$ = relative Häufigkeit des Zeichens c in der betrachteten Sprache S

- Ziel: Baum T bestimmen, so daß $B(T)$ = min

Buchstabenhäufigkeit in deutschen Texten

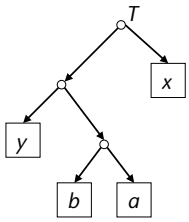
a	6,51 %	h	4,76 %	o	2,51 %	v	0,67 %
b	1,89 %	i	7,55 %	p	0,79 %	w	1,89 %
c	3,06 %	j	0,27 %	q	0,02 %	x	0,03 %
d	5,08 %	k	1,21 %	r	7,00 %	y	0,04 %
e	17,40 %	l	3,44 %	s	7,27 %	z	1,13 %
f	1,66 %	m	2,53 %	t	6,15 %		
g	3,01 %	n	9,78 %	u	4,35 %		

- Lemma H1:

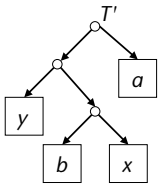
  Seien $x, y \in \Sigma$ die Zeichen mit minimaler Häufigkeit in S.

  Dann existiert ein optimaler Kodierungs-Baum für Σ,
  in dem x und y Brüder sind
  und sich auf dem untersten Level befinden.

- Beweis durch Widerspruch:
  - Idee: ausgehend von irgend einem "optimalen" Baum, konstruiere neuen Baum, der auch optimal ist und die Bedingungen erfüllt
  - Ann.: T ist optimaler Baum, aber x, y sind nicht auf max. Level
    → es ex. 2 Blätter a, b, die Brüder sind, mit $d_T(a) = d_T(b) \geq d_T(x), d_T(y)$



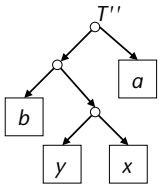
- Vertausche Blätter x und a →
  ergibt einen Baum T', der besser ist:



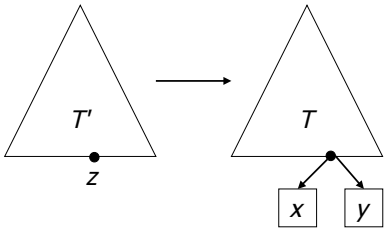
$$
\begin{aligned}
& B(T) - B(T') \\
&= \sum_{c \in \Sigma} h(c) d_T(c) - \sum_{c \in \Sigma} h(c) d_{T'}(c) \\
&= h(x) d_T(x) + h(a) d_T(a) - h(x) d_{T'}(x) - h(a) d_{T'}(a) \\
&= h(x) d_T(x) + h(a) d_T(a) - h(x) d_T(a) - h(a) d_T(x) \\
&= \big(h(a) - h(x)\big)\big(d_T(a) - d_T(x)\big) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

- Analog: y und b vertauschen ergibt T'' mit

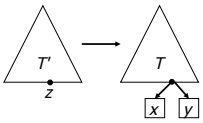
$$B(T'') \leq B(T')$$



- Lemma H2:
  Seien $x, y \in \Sigma$ Zeichen mit minimaler Häufigkeit.
  Setze $\Sigma' := \Sigma \setminus \{x, y\} \cup \{z\}$ (z ist ein neues "erfundenes" Zeichen)
  Definiere h auf Σ' wie auf Σ und setze $h(z) := h(x) + h(y)$.
  Sei T' ein optimaler Baum (bzgl. Codelänge) über Σ'.
  Dann erhält man einen optimalen Baum T für Σ aus T', indem man das Blatt z in T' ersetzt durch einen inneren Knoten mit den beiden Kindern x und y.



- Beweis:
  - Zunächst $B(T)$ mittels $B(T')$ ausdrücken:



$$\forall c \in \Sigma \setminus \{x, y\} : d_T(c) = d_{T'}(c)$$

$$d_T(x) = d_T(y) = d_{T'}(z) + 1$$

$$h(x)d_T(x) + h(y)d_T(y) = \big(h(x) + h(y)\big)\big(d_{T'}(z) + 1\big)$$
$$= h(z)d_{T'}(z) + h(x) + h(y)$$

$$B(T) = B(T') + h(x) + h(y)$$

  - Ann.: T ist nicht optimal → es gibt (optimales) T'' mit $B(T'') < B(T)$
    - T'' optimal → x, y sind Brüder auf unterstem Level in T'' (gemäß erstem Lemma)
    - Erzeuge Baum T''' aus T'', in dem x, y und deren gemeinsamer Vater ersetzt werden durch ein neues Blatt z, mit $h(z) = h(x) + h(y)$
    - $B(T''') = B(T'') - h(x) - h(y) < B(T) - h(x) - h(y) = B(T')$
    - Also wäre schon T' nicht optimal gewesen → Widerspruch!

Der Algorithmus zur Erzeugung eines Huffman-Codes

- Idee: "bottom-up" Konstruktion durch Wiederholung der folgenden zwei Schritte
  1. Sortiere die Zeichen nach ihrer relativen Häufigkeit
  2. Verschmelze die beiden seltensten Zeichen:
     1. Erzeuge einen gemeinsamen Vater für die beiden Knoten dieser Zeichen
     2. Ersetze die beiden Zeichen durch ein neues "künstliches" Zeichen
- Beispiel: Σ = {A, B, C, D, E}

1. Ermittle die Häufigkeiten und Sortierung

Zeichen	h
A	8/15
B	2/15
C	2/15
D	2/15
E	1/15

2. Aufbau des Baums

(rel. Häufigkeiten sind mit 15 erweitert)

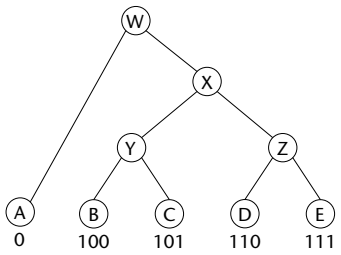
A: 8 B: 2 C: 2 D: 2 E: 1

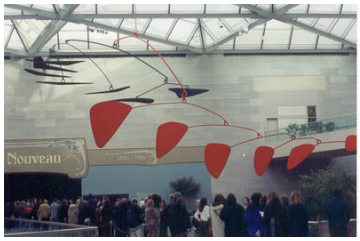
A: 8 Z: 3 B: 2 C: 2

A: 8 Y: 4 Z: 3

A: 8 X: 7

W: 15

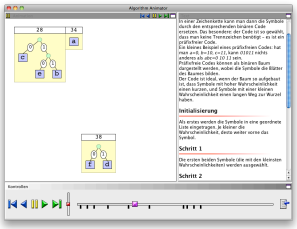




Der Algorithmus zur Erzeugung des Codes

```
# C = Alphabet, jedes c∈C hat c.freq
# q = P-Queue, sortiert nach c.freq
füge alle c∈C in q ein
while q enthält noch mehr als 1 Zeichen:
    x = extract_min( q )
    y = extract_min( q )
    erstelle neuen Knoten z mit Kindern x und y
    z.freq = x.freq + y.freq
    q.insert( z )
return extract_min(q)          # = Wurzel des Baumes
```

(Anmerkung: dies ist ein Greedy-Algorithmus)



http://graphics.ethz.ch/teaching/former/-infotheory0506/Downloads/-Applet_work_fullscreen.html

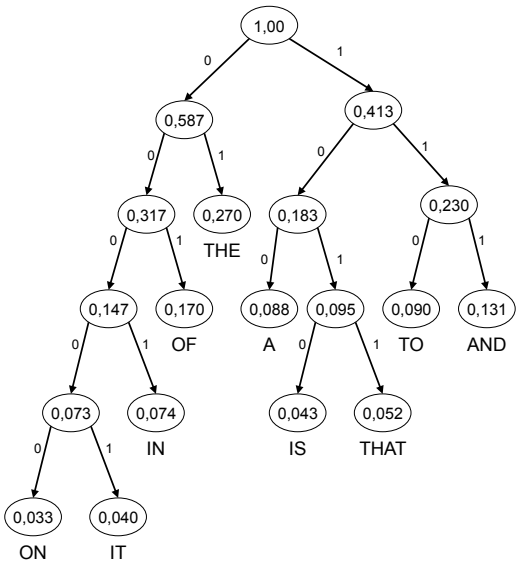
Gesamt-Algorithmus zum Kodieren eines Textes

1. Aufbau des Code-Baums (muß man nur 1x machen)
   - Häufigkeit der Zeichen beim Durchlaufen des Text-Korpus ermitteln
   - Heap für die Knoten, geordnet nach Häufigkeit, erzeugen
   - Code-Baum konstruieren (greedy)
2. Erzeugen der Code-Tabelle (dito)
   - Traversierung des Baumes
3. Kodieren des Textes
   - Look-up der Codes pro Zeichen in der Code-Tabelle
4. Optional:
   - Erzeuge für jeden Text eine eigene Code-Tabelle (Schritt 1 und 2)
   - Übertrage die Code-Tabelle mit dem Text
   - Lohnt sich nur, falls Länge des Textes >> Länge der Code-Tabelle

Dekodierung mit Huffman-Codes

- Aufbau des Code-Baums
  - Ergibt binären Baum (linkes Kind = "0", rechtes Kind = "1")
- Dekodieren der Bitfolge (= kodierter Text)
  - Beginne an der Wurzel des Code-Baums
  - Steige gemäß der gelesenen Bits im Baum ab
  - Gib bei Erreichen eines Blattes das zugehörige Zeichen aus und beginne von vorne

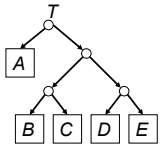
Beispiel: Kodierung ganzer Wörter



Codierungseinheit	W'keit des Auftretens	Code-Wort	Code-Länge
the	0,270	01	2
of	0,170	001	3
and	0,137	111	3
to	0,099	110	3
a	0,088	100	3
in	0,074	0001	4
that	0,052	1011	4
is	0,043	1010	4
it	0,040	00001	5
on	0,033	00000	5

Effiziente Übertragung der Code-Tabelle

- Beobachtungen:
  - Genaue Lage eines Zeichens im Baum ist egal! Wichtig ist nur die Tiefe! (und, natürlich, eine konsistente Beschriftung der Kanten)
  - Umarrangieren liefert Baum, in dem Blätter von links nach rechts tiefer werden
  - Codes der Zeichen ändern sich, nicht aber die Optimalität
- Übertragung des Baumes:
  - Gib Anzahl Zeichen mit bestimmter Länge an, gefolgt von diesen Zeichen, aufsteigend nach Länge
  - Beispiel:
    - 1 Zeichen der Länge 1, 0 der Länge 2, 4 der Länge 3
    - 01, A, 00, , 04, B, C, D, E
  - Damit lässt sich der ursprüngliche Baum wieder genau rekonstruieren

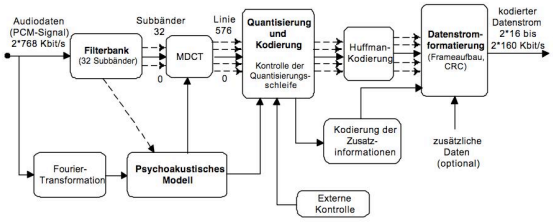


Eigenschaften

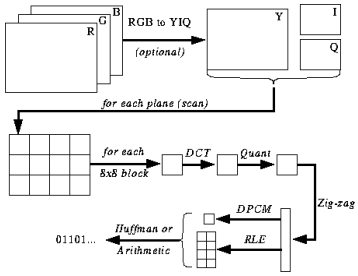
- In gewissem Sinn(!) optimaler, d.h. minimaler, Code
  - Voraussetzung u.a.: Vorkommen der Zeichen ist unabhängig voneinander; die Zeichen werden immer einzeln kodiert
- Keine Kompression für zufällige Daten
  - Alle Zeichen habe annähernd gleiche Häufigkeit
- Erfordert i.A. zweimaliges Durchlaufen des Textes
  - Ermöglicht kein „*Stream Processing*“
- Das Wörterbuch muß i.A. zusätzlich gespeichert werden
  - Für große Dateien vernachlässigbar
  - Nicht aber für kleine

Anwendungsbeispiele der Huffman-Kodierung

- MP3-Kompression:



- JPEG-Kompression:



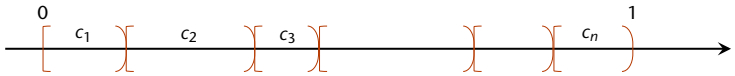
Arithmetic Coding (nur das Grundprinzip) [1978]

- Ein Nachteil von Huffman:
  1. Zeichen $c \in \Sigma$ werden einzeln kodiert
  2. Hat ein Zeichen z.B. die Häufigkeit $h(c)$=0.49, so muss dafür trotzdem ein 2 Bit langes Codewort spendiert werden

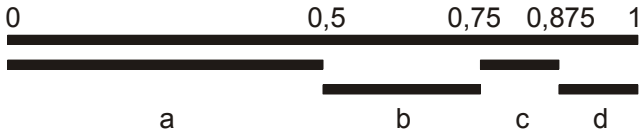
- Betrachte die Häufigkeiten (= Wahrscheinlichkeiten) etwas anders:
  - Schreibe ab jetzt $p(c)$ statt $h(c)$; es gilt weiterhin $p(c) \in [0,1]$
  - Es gilt die Teilung der 1 (*partition of unity*):

$$\sum_{c \in \Sigma} p(c) = 1$$

  - Partitioniere also das Intervall [0,1] in eine Menge von Intervallen:



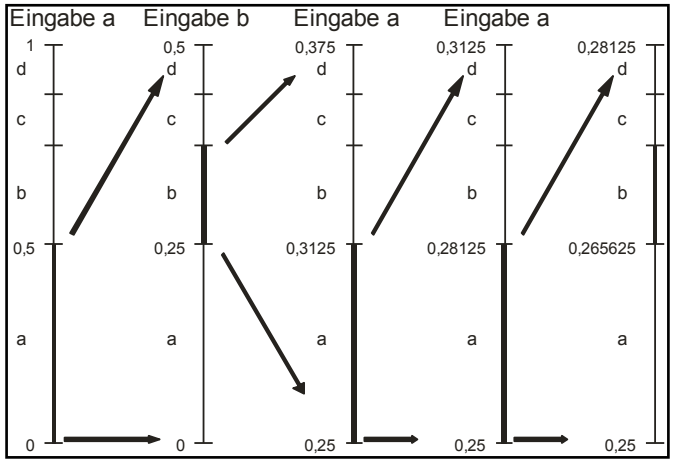
- Beispiel:
  - Σ = {a, b, c, d}
  - $p(a)$ = 50% = 1/2, $p(b)$ = 25% = 1/4, $p(c)$ = $p(d)$ = 12.5% = 1/8
  - Partition des Intervalls [0,1]:



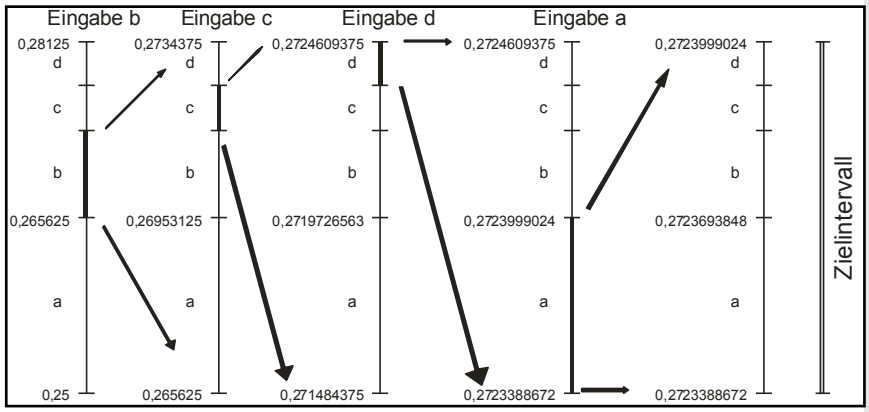
Die prinzipielle Idee des arithmetischen Kodierens

- Annahme (zunächst): wir können mit reellen Zahlen beliebiger Genauigkeit rechnen (Mantisse der Floating-Point-Zahlen darf beliebig lang werden)
- Ein Eingabestring wird in eine (1) reelle Zahl im Intervall [0,1) konvertiert
  - Ohne IEEE-Darstellung, d.h., kein Exponent, keine Normierung
  - Die Mantisse ist die Kodierung des Eingabestrings
- Der Algorithmus:
  - Setze (a_1,b_1) = Intervall des ersten Eingabezeichens
  - Partitioniere (a_1,b_1) analog wie die Partitionierung von [0,1) und greife daraus das Intervall für das zweite Eingabezeichen → (a_2,b_2)
  - Partitioniere (a_2,b_2) und greife daraus das Intervall des dritten Zeichens
  - …

Beispiel: Kodierung von "abaabcda"



Beispiel: Kodierung von "abaabcda"

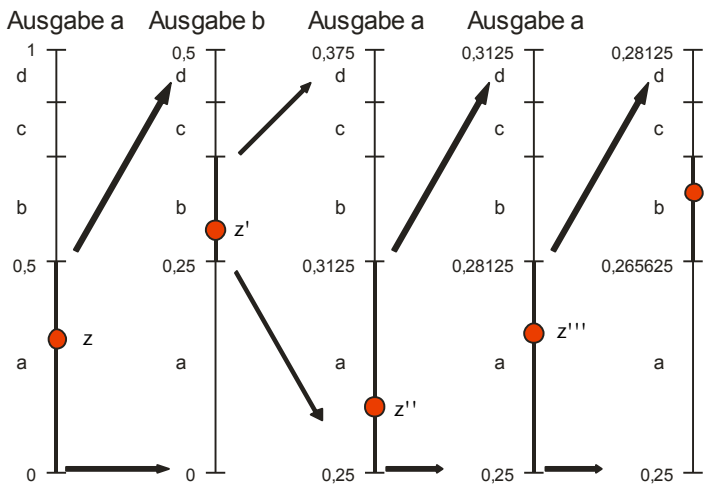


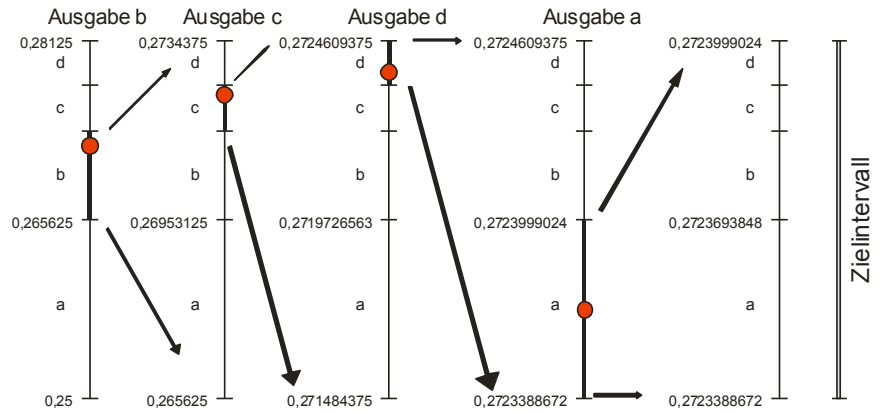
- Ausgabe des Kodierers:
  1. Eine Zahl aus dem Inneren des Zielintervalls (z.B. untere Schranke, oder Mitte)
  2. Anzahl der kodierten Zeichen

Dekodierung

- Dekodierung vollzieht die Schritte des Kodierers nach
- Eingabe:
  - Anzahl Zeichen + eine (lange) reelle Zahl *z*
- Der Algorithmus:
  - Bestimme, in welches Teilintervall [a,b) von [0,1) die Zahl z fällt
  - Gebe das zugehörige Zeichen aus (= erstes Zeichen des Ausgabestrings)
  - Transformiere z und [a,b) so, daß [a,b) → [0,1);
    liefert ein neues z' (das aus z durch die Transformation hervorgeht)
  - Wiederhole, bis Anzahl Zeichen erreicht ist.

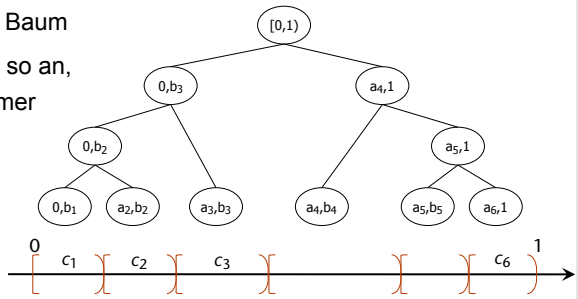
Beispiel "abaabcda"





Effiziente Dekodierung

- Wie findet man *schnell* (gemittelt über einen langen Folge solcher Suchoperationen!), welches Intervall von einem bestimmten Punkt getroffen wird?
- Beobachtung: ein großes Intervall wird wahrscheinlich häufiger getroffen …
- Lösung: baue über der Partitionierung einen Baum à la Huffman!
  - Erzeuge zuerst den Baum
  - Ordne die Intervalle so an, dass ein Knoten immer ein konsekutives Intervall aus [0,1) überdeckt

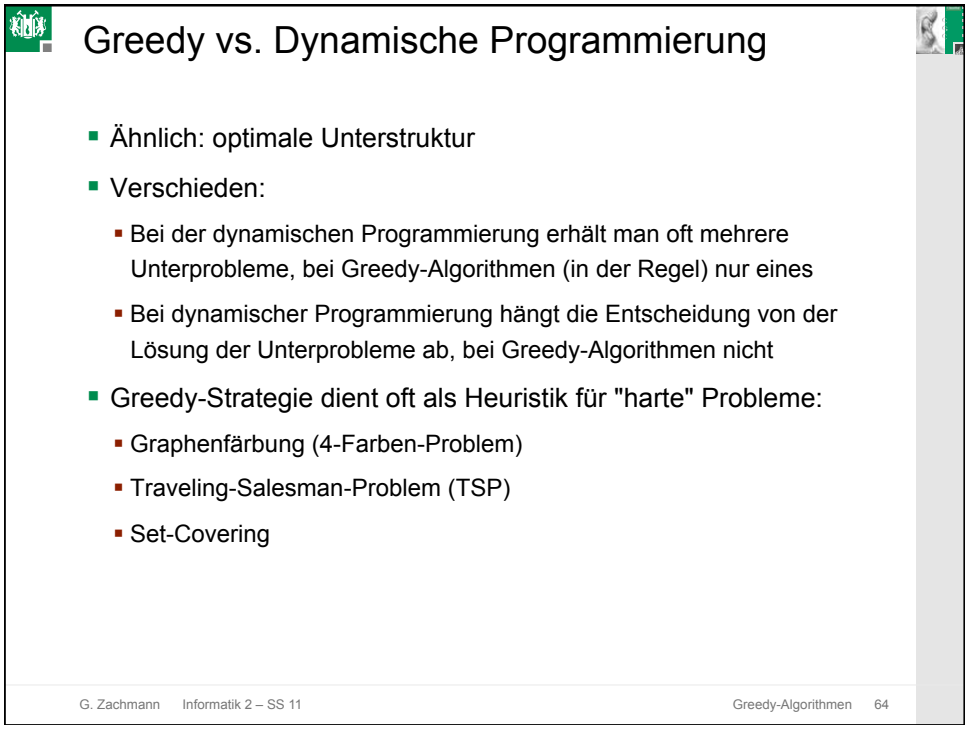


Vergleich zwischen Huffman und arithm. Coding

- Für lange Eingabestrings liefert AC eine bessere *compression ratio*
- Für kurze Strings oder große Alphabete liefert Huffman eine bessere Kompression
- Bei Übertragungsfehler:
  - Ein falsches Bit macht den Rest des AC-Codes ungültig
  - Bei Huffman besteht die Möglichkeit, dass das nächste Zeichen wieder korrekt dekodiert wird
- Der Dekoder bei AC ist langsamer
- Man kann beide in Integer-Arithmetik implementieren
- Bei AC kann man einfacher die Wahrscheinlichkeiten der Zeichen zwischendurch ändern
  - Adaptive Coding

Zusammenfassung Greedy-Algorithmen

- Allgemeine Vorgehensweise:
  - Treffe in jedem Schritt eine lokale(!) Entscheidung, die ein kleineres Teilproblem übrig lässt
- Korrektheitsbeweis:
  - Zeige, daß eine optimale Lösung des entstehenden Teilproblems zusammen mit der getroffenen Entscheidung zu optimaler Lösung des Gesamtproblems führt
  - Das lässt sich meist durch Widerspruch zeigen:
    - Angenommen, es gibt optimale Lösung S', die besser ist als Greedy-Lösung S
    - Zeige: dann kann S' noch verbessert oder in Greedy-Lösung umgewandelt werden



Greedy vs. Dynamische Programmierung

- Ähnlich: optimale Unterstruktur
- Verschieden:
  - Bei der dynamischen Programmierung erhält man oft mehrere Unterprobleme, bei Greedy-Algorithmen (in der Regel) nur eines
  - Bei dynamischer Programmierung hängt die Entscheidung von der Lösung der Unterprobleme ab, bei Greedy-Algorithmen nicht
- Greedy-Strategie dient oft als Heuristik für "harte" Probleme:
  - Graphenfärbung (4-Farben-Problem)
  - Traveling-Salesman-Problem (TSP)
  - Set-Covering