Informatik II
Sortieren

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

Sortieralgorithmen

- Preprocessing fürs Suchen
- sind für kommerzielle Anwendungen häufig die Programmteile, die die meiste Rechenzeit verbrauchen
- viele raffinierte Methoden wurden im Laufe der Zeit entwickelt, von denen wir ein paar kennenlernen wollen

Die Sortieraufgabe

- Eingabe: Datensätze (records) aus einem File, der Form
  - *Key* und *satellite/payload data*

- Sortierschlüssel kann aus einem oder mehreren Feldern des Datensatzes bestehen (z.B. Nachname + Vorname)
- Ordnungsrelation: auf den Keys muß eine totale Ordnungsrelation $\preceq$ definiert sein, d.h., es gilt
  - Trichotomie: für alle Keys a,b gilt genau eine Relation
    $$a \prec b, \quad a = b, \quad a \succ b$$
  - Transitivität:
    $$\forall a, b : a \prec b \wedge b \prec c \Rightarrow a \prec c$$
- Aufgabe: bestimme eine Permutation $\Pi = (p_1, \ldots, p_n)$ für die Records, so daß die Keys in nicht-fallender Ordnung sind:
  $$K_{p_1} \preceq \ldots \preceq K_{p_n}$$

- Implementierung üblicherweise als Klasse (oder **`struct`** in C)

```
class MyData:
    def __init__( self, key, value ):
        self.key = key
        self.value = value
    def __cmp__( self, other ):
        if self.key < other.key:
            return 1
        elif self.key > other.key:
            return -1
        else:
            return 0
a = MyData(…)
b = MyData(…)
if a < b:
   ...
```

```
class Student
{
   String     Name;
   String     Vorname;
   long int   MatrikelNr;
   short int  Fachbereich;
};
```

Klassifikation / Kriterien von Sortierverfahren

- interne Sortierverfahren
  - alle Datensätze befinden sich im Hauptspeicher
  - es besteht *random access* auf den gesamten Datenbestand
  - bekannte Verfahren: Bubblesort, Insertionsort, Selectionsort, Quicksort, Heapsort
- externe Sortierverfahren
  - die Datensätze befinden sich in einem Hintergrundspeicher (Festplatte, Magnetband, etc.) und können nur sequentiell verarbeitet werden
  - bekanntes Verfahren: Mergesort

- Vergleichsbasiert (*comparison sort*): zulässige Operationen auf den Daten sind nur Vergleich und Umkopieren
- Stabil (*stable*): Gleiche Keys behalten ihre relative Lage zueinander, d.h.,

$$K_{p_i} = K_{p_j} \wedge i < j \Rightarrow p_i < p_j$$

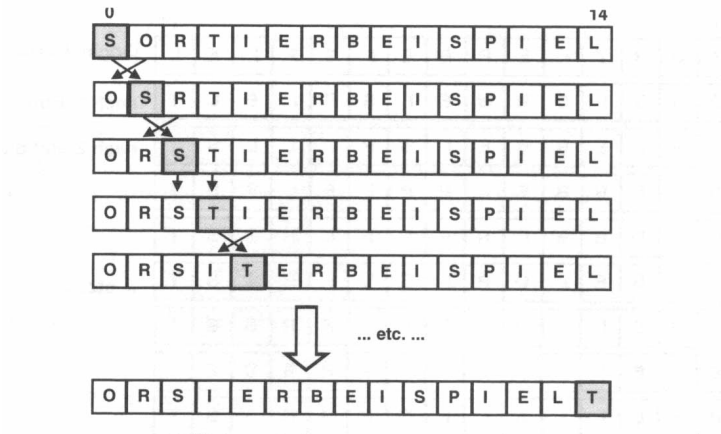
- Array-basiert vs. Listen-basiert: Können Datensätze beliebig im Speicher angeordnet sein (Liste), oder müssen sie hintereinander im Speicher liegen (Array)
- *In-Place* (in situ): Algorithmus braucht nur konstanten zusätzlichen Speicher (z.B. Zähler, keine Hilfsarrays)

Erster Sortier-Algorithmus: Bubblesort

- Idee
  - vergleiche von links nach rechts jeweils zwei Nachbarelemente und vertausche deren Inhalt, falls sie in der falschen Reihenfolge stehen;
  - wiederhole dies, bis alle Elemente richtig sortiert sind;
  - die kleinsten Elemente steigen wie Luftblasen zu ihrer richtigen Position auf.
- Python-Code:

```
def bubblesort( a ):
    for k in range( len(a)-1, 0, -1 ):
        for i in range(0,k):
            if a[i] > a[i+1]:
                a[i], a[i+1] = a[i+1], a[i]
```


- Beispiel



Korrektheits-"Beweis"

- Schleifeninvariante:
  - Nach dem i-ten Durchlauf befinden sich die i größten Elemente an der richtigen Position (und in der richtigen Reihenfolge)
  - nach dem 1. Durchlauf befindet sich das größte Element an der richtigen Stelle
  - nach dem 2. Durchlauf auch das 2.-größte, etc.
- nach spätestens *N*-1 Durchgängen ist das Array sortiert
- da bei jedem Durchlauf auch andere Elemente ihre Position verbessern, ist häufig der Vorgang bereits nach weniger als *N*-1 Durchgängen beendet

- Beispiel

0														14	
S	O	R	T	I	E	R	B	E	I	S	P	I	E	L	Original-Array
O	R	S	I	E	R	B	E	I	S	P	I	E	L	T	nach 1. BubbleUp
O	R	I	E	R	B	E	I	S	P	I	E	L	S	T	nach 2. BubbleUp
O	I	E	R	B	E	I	R	P	I	E	L	S	S	T	
I	E	O	B	E	I	R	P	I	E	L	R	S	S	T	
E	I	B	E	I	O	P	I	E	L	R	R	S	S	T	... etc. ...
E	B	E	I	I	O	I	E	L	P	R	R	S	S	T	
B	E	E	I	I	I	E	L	O	P	R	R	S	S	T	
B	E	E	I	I	E	I	L	O	P	R	R	S	S	T	
B	E	E	I	E	I	I	L	O	P	R	R	S	S	T	nach 10. BubbleUp
B	E	E	E	I	I	I	L	O	P	R	R	S	S	T	Sortiert !

- Kleine Optimierung: Test auf vorzeitiges Ende

```
def bubblesort( a ):
    for k in range (len(a)-1, 0, -1):
        sorted = true
        for i in range (0,k):
            if a[i] > a[i+1]:
                a[i], a[i+1] = a[i+1], a[i]
                sorted = false
        if sorted:
            break
```


Aufwand von Bubblesort

- Laufzeitberechnung für den schlimmsten Fall

```
def bubblesort( a ):
    k = len(a)-1                          c2
    while k >= 0:                         c1
        for i in range (0,k):             c3
            if a[i]>a[i+1]:               c0
                a[i], a[i+1] = a[i+1], a[i]
```

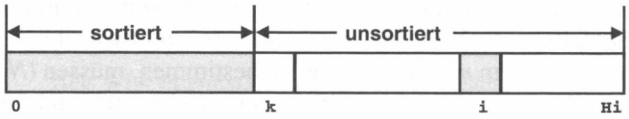
$T(n)$: c_2 + $k \times (c_1 + c_3 \times (c_3 + c_0))$

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n} c_3' k = c_3' \sum_{k=1}^{n} k = c_3' \tfrac{1}{2} n(n+1) \approx cn^2 \in O(n^2)$$

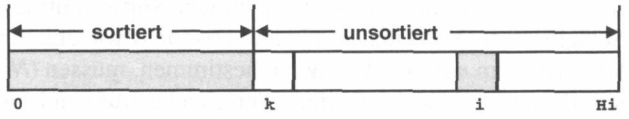
- Für den besten Fall (für den Code mit "early exit"): T(n) = cn
  - Beweis: Übungsaufgabe
- Im durchschnittlichen Fall (o.Bew.): $T(n) \approx cn^2$

Selectionsort

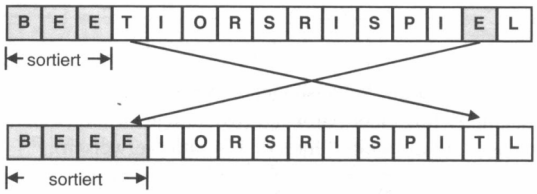
- Sortieren durch Auswahl
  - suche das kleinste Element A[i] der noch nicht sortierten Elemente



  - und hänge es an die Menge der sortierten Elemente hinten an (durch Vertauschung)



Beispiel



Python Code

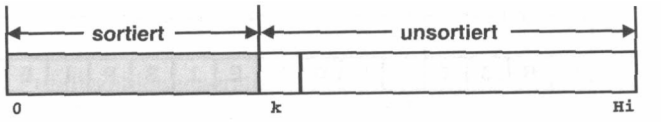
```
def minPos(a, lo, hi):
   min = lo;
   for i in range(lo+1, hi):
      if a[i] < a[min]:
         min = i
   return min

def selectionsort(a):
   for k in range(0, len(a)-1 ):
      min = minPos(a, k, len(a) )
      if min != k:
         a[min], a[k] = a[k], a[min]
```


Laufzeitbetrachtung

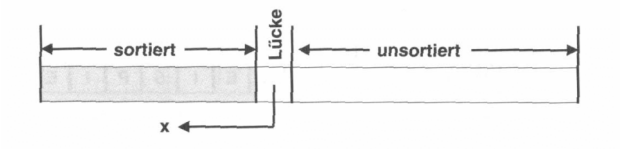
- Ebenfalls $\approx N^2$, da wieder zwei ineinander geschachtelte Schleifen (ganz ähnlich zu Bubblesort)
- aber Vorfaktor niedriger als bei Bubblesort, da nur einmal pro Durchgang getauscht wird
- allerdings braucht Selectionsort immer gleich viele Durchläufe, während Bubblesort häufig vorzeitig abbricht, insbesondere bei vorsortierten Arrays

Insertionsort

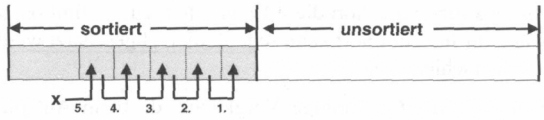
- Sortieren durch Einfügen
  - wie das Sortieren beim Kartenspielen
    - eine Karte nach der anderen wird aufgenommen und an die richtige Stelle einsortiert
  - sei ein Teil des Arrays schon sortiert



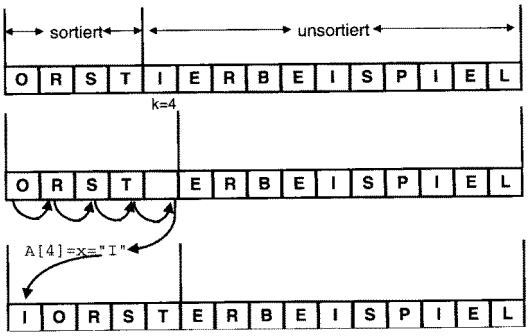
- dann wird das nächste Element A[k] herausgenommen



- die entstehende Lücke wird von links durch Verschieben der bereits sortierten Elemente aufgefüllt, bis die Stelle gefunden ist, an die A[k] gehört



Beispiel



Algo-Animation

Insertion Sort an N Element Array

In i^{th} iteration:

- Read i^{th} value.
- Repeatedly swap i^{th} value with the one to its left if smaller.

- Property: after i^{th} iteration, array positions 0 through i contain original elements 0 through i in increasing order.

Array index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Value	2.78	7.42	0.56	1.12	1.17	0.32	6.21	4.42	3.14	7.71

Iteration 0: step 0

Courtesy Kevin Wayne & Robert Sedgewisk

Python Code

```
def insertionsort(a):
    for k in range( 1, len(a) ):
        x = a[k]
        i = k
        while i > 0 && a[i-1] > x:
            a[i] = a[i-1]
            i -= 1
        a[i] = x
```

Geht dieser Test gut?
(ist a[i-1] immer wohldefiniert??)