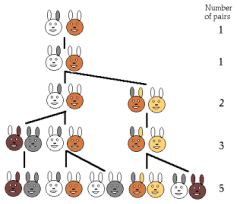
Beispiel: Fibonacci-Zahlen

- Unendliche Reihe: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . .

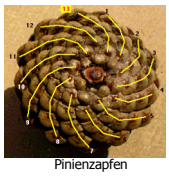
$$F_n = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & , \text{sonst} \end{cases}$$

Fibonacci-Kaninchen:

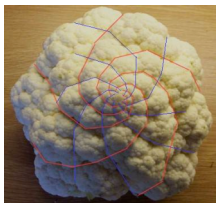


L. P. Fibonacci (1170 - 1250)

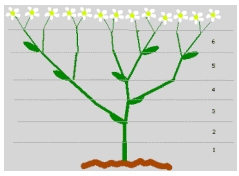
Fibonacci Zahlen in der Natur



Pinienzapfen



Blumenkohl



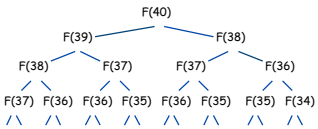
Nach 2 Monaten Wachstum produziert ein Zweig jeden Monat eine Abzweigung

Mögliche Gefahren bei Rekursion

- Ist Rekursion schnell?
  - Ja. Bsp.: sehr effizientes Programm für ggT
  - Nein. Bsp.: Rekursive Berechnung von F_n ist extrem ineffizient!
- Das Programm:

```
def F( n ) :
    if n == 0 or n == 1:
        return n
    else:
        return F( n-1) + F( n-2)
```

- Beobachtung: es dauert sehr lange, um F(40) zu berechnen!



F(39) wird einmal berechnet.
F(38) wird 2-mal berechnet.
F(37) wird 3-mal berechnet.
F(36) wird 5-mal berechnet.
F(35) wird 8-mal berechnet.
...
F(0) wird 165,580,141-mal berechnet.

331,160,281 rekursive Funktionsaufrufe

Lösungen für ineffiziente Rekursionen

- Allgemeine Lösung, um nicht wiederholt Zwischenergebnisse zu berechnen:
  - Speichere Zwischenergebnisse in einer Tabelle
  - Schaue zuerst in dieser Tabelle nach, bevor Rekursion gemacht wird
- Spezielle Lösung:
  - Finde direkte Berechnungsvorschrift
  - Bsp. Fibonacci:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (1-\Phi)^n}{\sqrt{5}}$$
$$\Phi = 1.61803398875\ldots$$
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

Beispiel: Modulare Exponentiation

- Gegeben positive ganze Zahlen n, e, und m, berechne n^e mod m
  - Bsp: 11^{13} mod 53 = 52
  - Ist der Verschlüsselungsschritt bei RSA
    - n = Klartext, alle Zahlen im Bereich 1024 Bits
  - Teil des probabilistischen Miller-Rabin-Primzahltests (evtl. später)
- Einfache iterative Lösung:

```
def modexp(n, e, m):
    prod, i = 1, 0
    while i < e:
        prod *= n      ⇐ Zwischenzahlen können 64 Bits sein
        prod %= m      ⇐ In jedem Durchlauf mod machen,
    return prod          um Überlauf zu vermeiden
```

- Aufwand: N Multiplikationen und mods.

- Rekursive Lösung:

$$a^N = \begin{cases} 1 & , N = 0 \\ a^{\frac{N}{2}} \times a^{\frac{N}{2}} & , N \text{ gerade} \\ a \times a^{\frac{N-1}{2}} \times a^{\frac{N-1}{2}} & , N \text{ ungerade} \end{cases}$$

- Beispiel:

$17^{47} = 17 \times 17^{23} \times 17^{23}$

Nur einmal berechnen

- Implementierung:

```
def modexp(n, e, m) :
    if e == 0:
        return 1
    t = modexp(n, e/2, m)
    c = (t * t) % m
    if e % 2 == 1:
        c = (c * n) % m
    return c
```

- Aufwand:
  max. $2 \cdot \log n$
  viele Mult./Mod.

Weitere Gefahr bei Rekursion

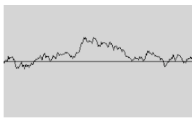
- Resultat der Berechnung / des Algorithmus nicht offensichtlich
- Besonders "tückisches" Beispiel: McCarthys „91-Funktion“:

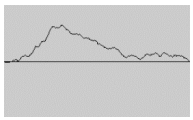
$$f(n) = \begin{cases} n-10, & \text{falls } n>100 \\ f(f(n+11)), & \text{sonst} \end{cases}$$

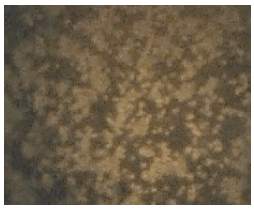
f(100) = f(f(111)) = f(101) = 91
f(99) = f(f(110)) = f(100) = 91
f(98) = f(f(109)) = f(99) = 91
f(97) = f(f(108)) = f(98) = 91
....
f(91) = f(f(102)) = f(92) = 91
.....
f(88) = f(f(99)) = f (91) = 91
.....
Also: f(n) = 91 für alle n

Brown'sche Bewegung

- Physikalischer Prozeß, der viele natürliche Phänome modelliert
  - Verteilung von Tinte in Wasser
  - Preis von Aktien
  - Formen der Berge und der Wolken (Fraktale)

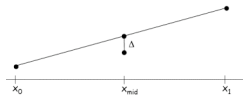






Simulation der Brown'schen Bewegung

- Random Midpoint Displacement-Methode
  - Führe ein Intervall mit Endpunkten (x0,y0) und (x1,y1)
  - Starte mit zufälligen initialen (x0,y0) und (x1,y1)
  1. Wähle Δ zufällig aus der Gaußschen Verteilung und proportional zur Länge des Segmentes (x0,y0),(x1,y1)
  2. Setze $x_{\text{mid}} = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ und $y_{\text{mid}} = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) + \Delta$
  3. Wiederhole auf den linken und rechten Intervallen, bis Intervall "klein genug"

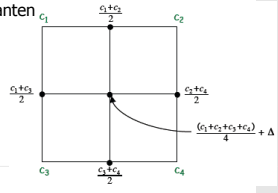


- A. Fournier, D. Fussel, and L. Carpenter: *Computer Rendering of Stochastic Models.* Communications of the ACM, 25:371-384, 1982.

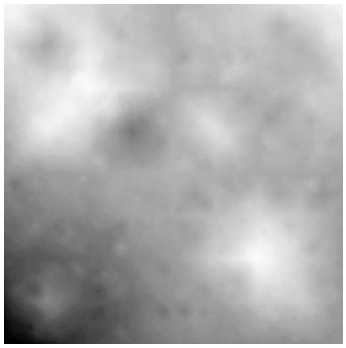
Anwendung: Plasma-Wolke

- Starte mit Quadrat und zufälligen Intensitätswerten c_i an den Ecken
- Jede Ecke beschriftet mit Grayscale Wert

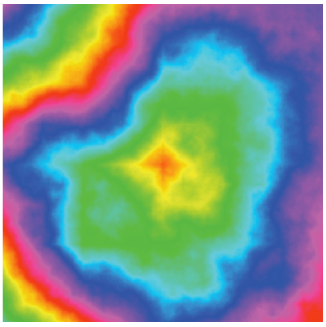
1. Teile Quadrat in vier Quadranten
2. Grayscale-Wert jeder neuen Ecke ist der Durchschnitt von anderen:
   - Mitte: Durchschnitt der vier Ecken + gelegentliche Versetzung Δ
   - andere: Durchschnitt von zwei originalen Ecken
3. Wiederholen auf den vier Quadranten



Plasma-Wolke (Grayscale)

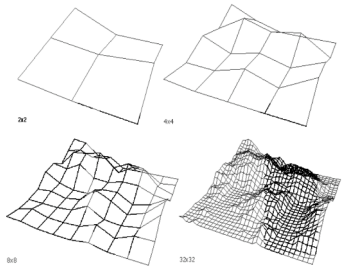


Plasma-Wolke (Farbe)



Fraktales Terrain

- Selbe Methode funktioniert auch, um Terrain zu generieren
- Interpretiere "Intensität" als "Höhe"



Mächtigkeit von Rekursion vs. Iteration

- Jede rekursive Funktion kann mit Iteration geschrieben werden
  - Compiler implementiert Funktionen mit einem Stack
  - Rekursion kann man durch Iteration + Stack ersetzen
- Jede iterative Funktion kann mit Rekursion geschrieben werden
  - Klar: verwende *Tail-Recursion*
- Effizienz: weder Iteration noch Rekursion sind *per se* schneller / langsamer
  - Auch der Overhead durch Funktionsaufruf spielt keine Rolle i.A.
- Soll man Iteration oder Rekursion verwenden?
  - Leichtigkeit und Klarheit der Implementierung
  - Time/space Effizienz

Rekursionsarten

- Lineare Rekursion
  - Funktion ruft sich selbst höchstens 1x auf
  - Anzahl Aufrufe ≤ Eingabegröße
  - Bsp.: rekursive Berechnung der Fakultät
  - Spezialfall *Tail Recursion*: Rekursion findet erst am Ende der Fkt statt
- Verzweigte Rekursion (*"fat recursion"*)
  - Funktion löst zwei oder mehr rekursive Aufrufe aus
  - Bsp.: rekursive Berechnung der Fibonacci-Zahlen
- Verschachtelte Rekursion (*"compound recursion"*)
  - Argument für rekursiven Aufruf wird selbst durch rekursiven Aufruf bestimmt
  - Bsp.: 91-Funktion & Ackermann-Funktion
- Offene Rekursion (nicht-monotone Rekursion)
  - Kontrollargument wird nicht immer in Richtung des Abbruchkriteriums verändert!
  - Folge: Der Rekursionsabbruch kann nicht sichergestellt werden
  - Bsp.: Ulam-Folge
- Wechselseitige Rekursion (indirekte Rekursion)
  - Funktion f ruft Funktion g auf, diese ruft wieder f auf

Die Ackermann-Funktion

- Definition:

  $A(0,n) = n+1$

  $A(m+1, 0) = A(m,1)$

  $A(m+1, n+1) = A(m, A(m+1,n))$
- Z.B.
  - $A(0,0) = 1$
  - $A(0,1) = 2$
  - $A(1,1) = A(0, A(1,0)) = A(0, A(0,1)) = A(0,2) = 3$

- Wachstum der Ackermannfunktion :

Values of $A(m, n)$

m\n	0	1	2	3	4	n
0	1	2	3	4	5	$n+1$
1	2	3	4	5	6	$n+2$
2	3	5	7	9	11	$2n+3$
3	5	13	29	61	125	$2^{n+3}-3$
4	13	65533	$2^{65536}-3$	$A(3, 2^{65536}-3)$	$A(3, A(4, 3))$	$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{n+3 \text{ twos}} - 3$
5	65533	$A(4, 65533)$	$A(4, A(5, 1))$	$A(4, A(5, 2))$	$A(4, A(5, 3))$	
6	$A(5, 1)$	$A(5, A(5, 1))$	$A(5, A(6, 1))$	$A(5, A(6, 2))$	$A(5, A(6, 3))$	

- Verwendung
  - Testen der Effizienz von Prozeduraufrufmechanismen
  - Beschreibung der Komplexität mancher Algos (Inverse der Ackermann-Fkt., α, spielt dabei oft eine Rolle)
  - Sonst keinen weiteren praktischen Nutzen
- Ähnlich: Takeuchi-Funktion

Exkurs: Primitiv-rekursive Funktion

- können auf bestimmte Art aus einfachen Grundoperationen zusammengesetzt werden
- der Begriff primitiv-rekursive Funktion wurde von der ungarischen Mathematikerin Rózsa Péter geprägt
- zeichnen sich durch eine gewisse Gutartigkeit aus
- Insbesondere: vor der Berechnung eines Funktionswertes kann man angeben, wie komplex diese Operation ist, d.h. auch, wie lange diese Berechnung dauern wird

Definition

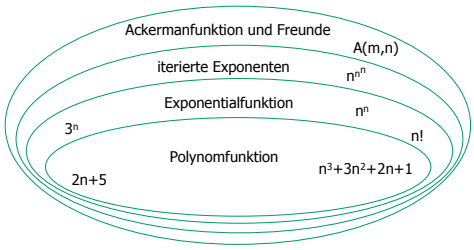
- Die Klasse Pr_k der primitiv-rekursiven Funktionen von $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ umfasst zunächst die folgenden prim.-rek. Grundfunktionen:
  1. konstante Funktion: $f_c^k(n_1,...,n_k) := c \quad c \in \mathbb{N}$
  2. Projektion auf ein Argument: $\pi_i^k(n_1,...,n_k) := n_i \quad 1 \le i \le k$
  3. Nachfolgefunktion (auch Sukzessorfunktion genannt): $\nu(n) := n+1$
- Aus diesen werden mit folgenden Operationen alle weiteren primitiv-rekursiven Funktionen gewonnen:
  - Komposition: $f(n_1,...,n_k) := g(h_1(n_1,...,n_k),...,h_m(n_1,...,n_k))$ wobei $g, h_1, ..., h_m \in Pr$
  - Primitive Rekursion:

$$f(0,n_2,...,n_k) := g(n_2,...,n_k) \qquad \text{(Basisfall)}$$
$$f(n_1+1,n_2,...,n_k) := h(f(n_1,...,n_k),n_1,...,n_k)$$
$$h, g \in Pr$$

Taxonomie

- Alle primitiv-rekursiven Funktionen sind Turing-berechenbar
- Frage: Wir wissen, jede primitiv-rekursive Funktion ist total. Wäre prima, wenn die primitiv-rekursiven Funktionen gerade die Turing-berechenbaren Funktionen wären!
- Traurige Tatsache: Es gibt totale Turing-berechenbare Funktionen, die nicht primitiv-rekursiv sind.
  - Z.B. *A*(*m*,*m*)
- Theorem (o. Bew.):
  Für jede primitiv-rekursive Funktion f gibt es ein *m*, so daß *f*(*m*) < *A*(*m*, *m*).
  So kann *A* nicht primitiv-rekursiv sein.

Wachstumsraten



Zusammenfassung

- Wie schreibt man einfache rekursive Programme?
  - Basis-Fall, Reduktions-Schritt
  - Rekursionsbaum aufzeichnen
  - Sonstige Zeichnungen
- Warum lernen wir Rekursion?
  - Neue algorithmische Denkweise
  - Sehr wichtige Algorithmentechnik
- Viele Probleme haben elegante *divide-and conquer* Lösungen
  - Adaptive Quadratur
  - Sortieren (Quicksort, später)
  - Matrix-Multiplikation
  - Quad-tree für effiziente N-body Simulation