Prof. G. Zachmann
R. Weller

TU Clausthal
Institut für Informatik
15. Mai 2009

Sommersemester 2009

Geometrische Datenstrukturen für die Computergraphik - Blatt 3

Abgabe am Mittwoch, dem 27. 05. 2009, 13:00 Uhr

Aufgabe 1 (Nächste Nachbarn, *2 Punkte*)

Gegeben sei eine endliche Menge P von Punkten in der Ebene. Zu wievielen Punkten aus P kann ein Punkt $p \in P$ der nächste Nachbar sein? (Beachten Sie, daß die "Nächster Nachbar"-Relation nicht kommutativ ist.)

Aufgabe 2 (kd-Trees und Dreiecke, *2+4 Punkte*)

Ein kd-Tree kann auch für dreieckige Bereichsanfragen verwendet werden.

a) Zeigen Sie, daß die Laufzeit für dreieckige Bereichsanfragen mit einem 2-dimensionalen kd-Tree im schlimmsten Fall linear ist, selbst wenn das Dreieck keinen Punkt des Baumes enthält. *Hinweis*: Betrachten Sie die Punkte auf der Gerade $y = x$.
b) Im folgenden beschränken wir uns auf Dreiecke in der Ebene, deren Kanten horizontal oder vertikal ausgerichtet sind, oder eine Steigung von -1 bzw $+1$ aufweisen.
Geben Sie eine Datenstruktur an, die für diese speziellen Dreiecke effizienter arbeitet. *Hinweis*: Erweitern Sie Ihren 2-dimensionalen kd-Tree.

Aufgabe 3 (Jenseits der allgemeinen Lage, *2+4 Punkte*)

Bisher sind wir stets von einer gutmütigen Verteilung der Punkte, der sogenannten *allgemeinen Lage*, ausgegangen, d.h. die Punkte unterschieden sich in ihren x- und y-Koordinaten und konnten dadurch stets durch eine achsenparallele Schnittgerade in zwei gleich grosse Teilmengen aufgeteilt werden. Leider neigen Datenmengen in der freien Wildbahn selten zu derartiger Gutmütigkeit, weswegen man sich auch um unschönere Punktemengen Gedanken machen sollte.

a) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge von Punkten in der Ebene, die sich durch *keine* achsenparallele Schnittgerade in zwei *gleich große* Teile zerlegen lässt. Die Menge sollte dabei idealerweise natürlich eine gerade Anzahl von Punkten enthalten.
b) Sei R eine Menge von Punkten in der Ebene. Zeigen Sie, daß es eine achsenparallele Gerade gibt, die selbst keinen Punkt aus R enthält und R so zerlegt, daß der kleinere Teil mindestens $\frac{n-1}{4}$ Punkte enthält. Ist diese Grenze scharf?

Aufgabe 4 (kd-Tree-Quickies, *3+3 Punkte*)

a) Beschreiben Sie den Algorithmus, der den Bereich $R(\nu)$ zu einem Knotens ν in einem kd-Tree berechnet.
b) Wie wächst die Anzahl der approximate nearest Neighbors mit der Dimension d?