Delaunay-Triangulierung

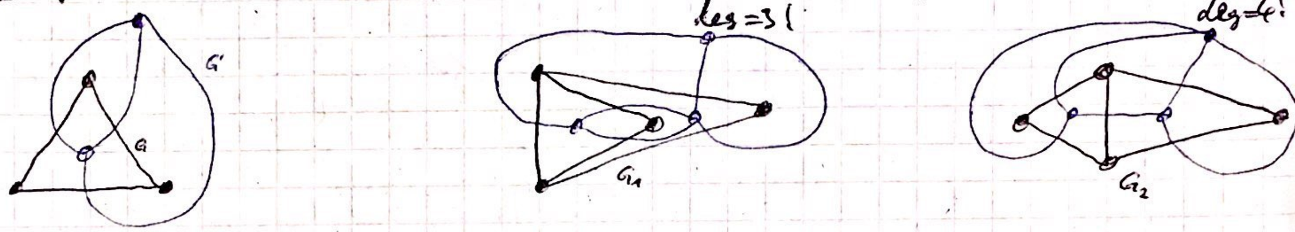
Definition:

Sei G ein geometric planarer Graph, $G=(V,E,F)$, wobei F auch die äußere Facette enthalten soll!

Der duale Graph $G' = (V',E',F')$ geht aus G hervor, indem man V und F vertauscht $(V'=F,\ F'=V)$ und für jedes $e \in E$ inzident zu f_1 und f_2 eine Kante $e' = (f_1', f_2')$ definiert.

(Das ist das geom. Dual; es noch ein kombinator. Dual; ist aber äquivalent)

Beispiel:



Achtung: aus dem Beispiel sieht man:

G_1, G_2 sind isomorph, aber G_1', G_2' nicht!

(weil der duale Graph von der geometrischen Einbettung des primären Graphen abhängt!) = weil bei Graph-Isomorphie die Facetten keine Rolle spielen.

Bemerkung: G ist ein dualer Graph zu G'

Bem.: Jeder planare Graph läßt sich mit geraden Kanten zeichnen.

[Deo: Graph Theory, S.55]

[Edelsbrunner-gelbes Buch, Kap. 3.1]

Definition:

Sei S eine Menge Pkte im $\mathbb{R}^2$.

Eine "Triangulierung" $T(S)$ ist ein maximaler planarer Graph über S, d.h., man kann keine weitere Kante zu $T(S)$ hinzufügen, ohne die Planarität zu zerstören.

Eigenschaften:

- Es gibt immer eine Triangulierung (in 2D!) und sie besteht immer aus Dreiecken (denn: jedes einfache Polygon läßt sich triangulieren)
- Es gibt nur endlich viele Triangulierungen
- Der Rand jeder $T(S)$ = Rand der $CH(S)$

  evtl. mit collinearen Pkten

  (denn: wäre das nicht so, könnte man noch eine Kante einziehen)
- Alle $T(S)$ haben dieselbe Anzahl Dreiecke [wende Euler an, ähnlich wie früher]

  $$2n-2-k$$ *

  wobei k = Anzahl Pkte auf der konvexen Hülle (= unbeschränkte Facette mit k Ecken/Kanten) # Kanten = $3n-3-k$
- Es gibt $O(59^n)$ viele Triangulierungen [Santos & Seidel, 2003]

*) Triangulation eines Pgons (auch nicht-konvex) hat immer $n-2$ viele Dreiecke (ist eine Art constrained triangulation)

Definition: [Rolf Klein]

Sei S eine Menge Pkte in $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{V}(S)$ das V.-Diagramm dazu.
Die "Delaunay-Triangulierung" $\mathcal{D}(S)$ ist ein (geometrischer) Graph $G=(S, E_G, F_G)$
über S (d.h., $V_{\mathcal{D}(S)} = S$), wobei

$$e = (p, q) \in E_{\mathcal{D}(S)} :\Leftrightarrow R(p) \text{ und } R(q) \text{ sind in } \mathcal{V}(S) \text{ benachbart.}$$

Solch eine Kante heißt "Delaunay-Kante".

Bezeichnung:

Im folgenden wollen wir unter "Pkte in allgemeiner Lage" verstehen, daß keine 4 auf einem Kreis (im 2D) und nicht alle auf einer Geraden.

Satz:

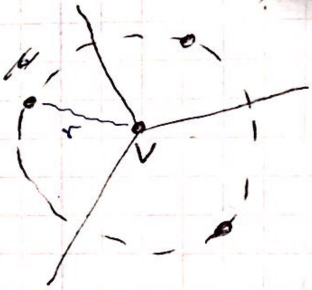
Sei S eine Menge Pkte in der Ebene in allg. Lage.
Dann gilt

1. $\mathcal{D}(S) = \mathcal{V}(S)'$ (d.h., die Delaunay-Tr. ist ein spezieller dualer Graph zu $\mathcal{V}(S)$)
2. $\mathcal{D}(S)$ ist eine Triangulierung
4. $p, q, r \in S$ bilden ein Dreieck aus $F_{\mathcal{D}(S)}$ $\Leftrightarrow$
der Kreis $C(x)$ durch p, q, r enthält keinen weiteren Pkt aus S
bilden ein Δ heißt "Delaunay-Dreieck"
3. $p, q \in S$ bilden eine Kante $(p, q) \in E_{\mathcal{D}(S)}$ $\Leftrightarrow$
ex Kreis $C(x)$ durch p, q, der keinen weiteren Pkt aus S enthält.

Beweis:

1. Klar aus Def. (Wir haben nur die Orte der Vertices von $\mathcal{V}(S)'$ speziell gewählt)
2. S in allg. Lage $\Rightarrow$ alle V.-Knoten haben Grad 3 $\Rightarrow$ alle Facetten von $\mathcal{V}(S)'$ haben 3 Kanten
3. Ann. $C(x)$ ex. $\Rightarrow$ $x \in B(p,q)$, genauer: x liegt auf Rand von [x lies on the edge between $R(p), R(q)$] [see chapter on Voronoi Diagr.] $R(p)$ und $R(q)$, da kein anderes $r \in S$ näher an x; das geht mit ganzer $U(x)$ $\Rightarrow$ $R(p), R(q)$ sind benachbart [share the/an edge] $\Rightarrow$ $(p,q) \in E_{D(S)}$ per Def.

   [Sei $(p,q) \in E_{D(S)}$ $\Rightarrow$ $R(p), R(q)$ benachbart, per Def $\Rightarrow$ ...
   $\forall x \in \overline{R(p)} \cap \overline{R(q)}$: $C(x)$ durch p, q enthält kein weiteres $r \in S$] evtl. Üb.aufg.
4. Ann.: Kreis $C(v)$ durch p, q, r enthält keinen weiteren Pkt aus S;

   Sei $r = d(p,v) = d(q,v) = d(r,v)$ $\Rightarrow$
   v = Voronoi-Knoten (von Grad 3) mit angrenzenden Regionen $R(p)$, $R(q)$, $R(r)$ $\Rightarrow$ p, q, r sind paarweise benachbart $\Rightarrow$ p, q, r werden durch Delaunay-Kanten verbunden und im Δpqr befindet sich kein weiterer Pkt.

   Ann.: $\Delta pqr \in F_{D(S)}$ $\Rightarrow$ $R(p), R(q), R(r)$ sind paarweise benachbart $\Rightarrow$ ex Voronoi-Knoten v mit $d(v,p) = \dots = r$ und $C_r(v)$ enthält keinen weiteren Pkt aus S [expanding circle]
   (wäre $s \in S$ im Inneren von $C_r(v)$, dann wäre $v \in R(s)$ und $p, q, r \notin C_r(v)$ $\Rightarrow$ W!)

~~Lemma:~~

Bezeichnung:

Eine Menge Pkte $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ist in "allgemeiner Lage" $:\Leftrightarrow$ ex keine 4 Pkte $\in S$, die auf einem Kreis liegen.

Achtung: in anderen Kontexten bedeutet "allg. Lage" mögl. weise etwas anderes!

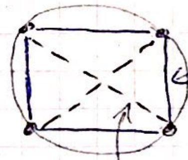
Lemma:

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$ in allg. Lage.

Dann ist die Delaunay-Triangulierung $\mathcal{D}(S)$ eindeutig.

Bew.: klar, da $\mathcal{V}(S)$ eindeutig und kein V.-Knoten Grad > 3 hat.
und jede/s Delaunay-Kante/-Dreieck genau einer/m V.-Kante/-Knoten entspricht

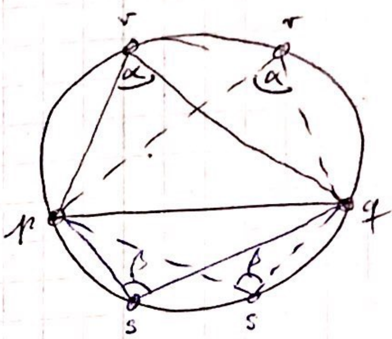
. Bei 4 Pkten auf Kreis sind beide Triangulierungen Delaunay:



Satz des Thales (refresh):

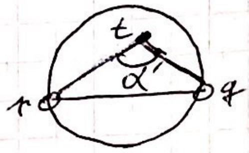
Sei $\overline{pq}$ Sehne eines Kreises C.

Dann gilt: der Winkel für alle Pkte r auf demselben Kreisbogen ist gleich.



(Außerdem gilt $\alpha + \beta = 180°$).

Außerdem gilt für alle t im Innern von C auf "derselben Seite" wie r:



$$\alpha' > \alpha$$

Bezeichnungen:

~~$C(p,q,r)$~~

$\bigcirc pqr$ = Kreis durch p, q, r = Umkreis um Δpqr
(circumcircle, circumcenter)

Edge-Flip:

gegeben zwei Dreiecke Δpqr und Δpqs.

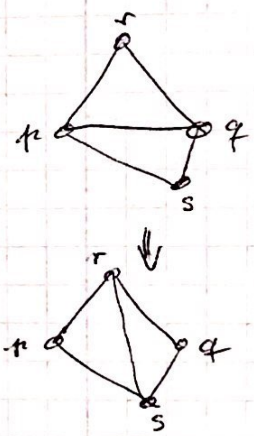
Die Kante $\overline{pq}$ heißt "flippable" $\Leftrightarrow$

p, q, r, s sind ein konvexes Viereck.

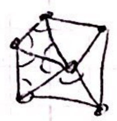
Die Kante $\overline{pq}$ "flippen" bedeutet,

Δpqr und Δpqs zu ersetzen durch

Δprs und Δqrs.



Der Winkel-Vektor:



Sei T eine Triangulierung von Pkten mit k Dreiecken.

Bezeichne mit $\alpha(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3k})$ den "Winkel-Vektor" aller Innenwinkel aller Dreiecke von T, (lexikographisch) aufsteigend sortiert: $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{3k}$

Definiere

$$\alpha(T) > \alpha(T') \;:\Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 > \alpha_1' \quad \text{oder}$$

$$\alpha_1 = \alpha_1', \dots, \alpha_j = \alpha_j', \; \alpha_{j+1} > \alpha_{j+1}'$$

Theorem (maximaler minimaler Winkel):

Sei S eine Menge Pkte in allg. Lage.

Dann gilt

$$\forall T(S): \quad \alpha(D(S)) \geq \alpha(T(S)) .$$

Insbesondere maximiert $D(S)$ den kleinsten Winkel.

$$\min_{D(S)} \{\alpha_i\} \geq \min_{T(S)} \{\alpha_j\}$$

Bew.:

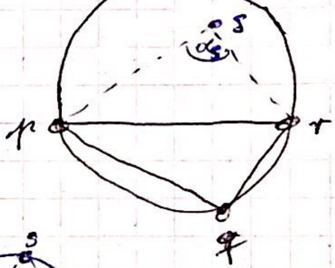
Ann.: $T = T(S)$ ist nicht Delaunay;

$\Rightarrow \exists$ Dreieck Δpqr, das Pkt s im Inneren von $\bigcirc pqr$ hat. (= Nicht-Delaunay-Dreieck)

Sei α_s = Winkel zwischen Tangenten an Δ durch s,

Wähle von allen Nicht-Delaunay-Δ das Δ mit max α_s.

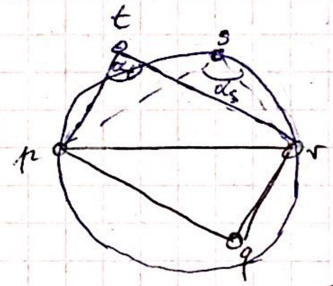
s muß außerhalb Δpqr liegen (sonst wäre T keine Triangulierung)



Beh.: $\Delta prs \in T$

Bew.: klar ist: $\overline{pr}$ liegt nicht auf $\partial CH(S)$;

Ann.: $\Delta prs \notin T \Rightarrow \exists t: \Delta prt \in T$

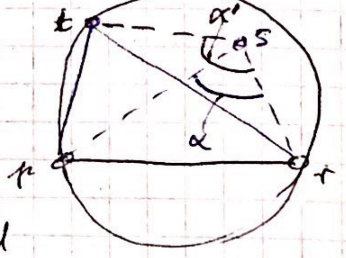


t muß außerhalb $\bigcirc prs$ liegen,

sonst wäre $\alpha_t \ngeq \alpha_s$! (Thales)

(Widerspruch zu Wahl von s)

$\Rightarrow s \in$ Inneres von $\bigcirc prt$

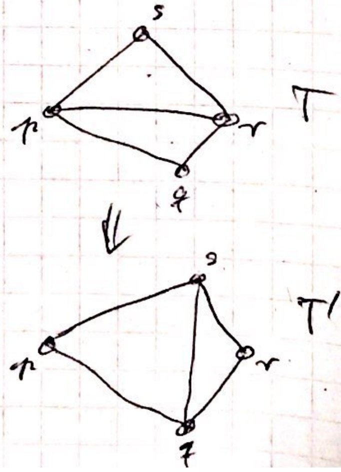


$\Rightarrow s$ "sieht" Δprt unter noch größerem Winkel $\alpha' > \alpha$.

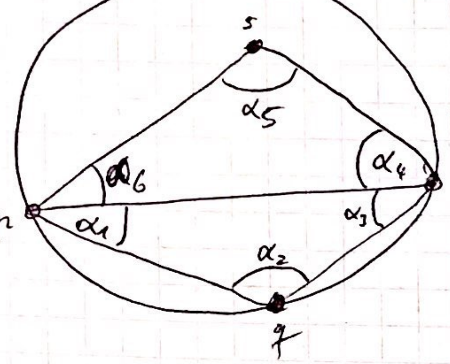
$\Rightarrow$ W! zur Wahl von s und Δpqr ! qed

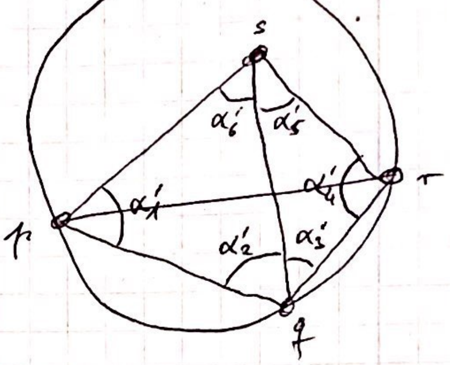
Beh.: wenn man $\overline{pr}$ flippt, bekommt man eine Triangulierung T' mit

$$\alpha(T') > \alpha(T) .$$



Winkel in $\alpha(T)$: Winkel in $\alpha(T')$:





Nur um diese Winkel unterscheiden sich $\alpha(T)$ und $\alpha(T')$!

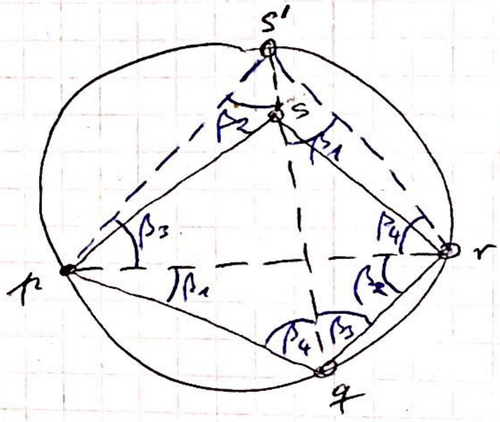
Jetzt 4x Thales anwenden auf

$\overline{qr}$, $s', p \rightarrow \beta_1$

$\overline{pq}$, $s', r \rightarrow \beta_2$

$\overline{ps'}$, $r, q \rightarrow \beta_4$

$\overline{rs'}$, $p, q \rightarrow \beta_3$



Daraus folgen folgende Beziehungen zwischen α_i und α_j':

$$\alpha_1' = \alpha_1 + \alpha_6 > \alpha_1$$
$$\alpha_2' = \beta_4 > \alpha_4$$
$$\alpha_3' = \beta_3 > \alpha_6$$
$$\alpha_4' = \alpha_3 + \alpha_4 > \alpha_3$$
$$\alpha_5' > \beta_1 = \alpha_1$$
$$\alpha_6' > \beta_2 = \alpha_3$$

$\Rightarrow$

$$\min\{\alpha_i'\} > \min\{\alpha_i\}$$

$\Rightarrow$ nach endlich vielen Edge-Flips ist man bei der Delaunay-Triangulierung angekommen

(gibt nur endl. viele Triangulierungen; Delaunay-Triangulierung ist eindeutig

Achtung: es gilt überall echt $>$! $\min \alpha_i' = \min \alpha_i$ kann also nicht passieren. Man muß sich also über die Beziehung der 2-kleinsten Winkel keine Gedanken machen!

Weitere globale Eigenschaften der Delaunay-Triangulierung:

1. $\mathcal{D}(S)$ enthält (als Teilgraphen) den minimum spanning tree von S.
2. $\mathcal{D}(S)$ ist ein geometric spanner mit dem Faktor $\frac{2\pi}{3\cos\frac{\pi}{6}}$, d.h. [keinen Beweis]

   $\forall p, q \in S:$ Pfadlänge $p \to q \leq \frac{2\pi}{3\cos\frac{\pi}{6}} \| p - q \|$

(D.h., die graph-theoretische Distanz zwischen zwei Knoten überschreitet die Euklidische Distanz nicht $\underbrace{\text{„zu sehr"}}_{\simeq 2.4\times}$.)

Berechnung der D(S)

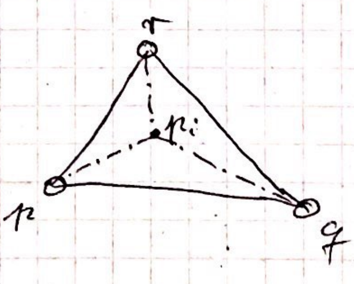
[Unser Buch S. 101 ff]

Bem.: Wenn viele Leute von V(S) sprechen, benötigen sie in Wahrheit oft nur D(S), d.h., die Info, welche V-Zellen benachbart sind.
Aus D(S) kann man auch rel. leicht V(S) komplett berechnen (mit Lage der V.-Knoten und -Kanten).

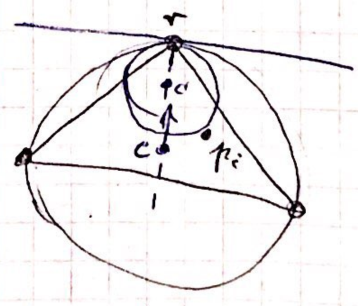
Verfahren: wieder randomisiert inkrementell
Grundoperationen:
- Pkt einfügen → point location problem
- In-Circle-Test
- Edge-Flips, bis wieder Delaunay

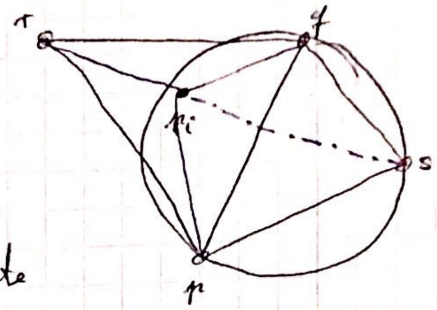
Sei $D_{i-1} := D(p_1, \dots, p_{i-1})$.
Füge nun p_i ein.
Terminologie: ein Δ^{pqr} und p_i sind "in Konflikt" miteinander
:⟺ p_i ist innerhalb $\bigcirc pqr$. (Erinnerung: S in allg. Lage!)
Fall 1: $p_i \in \Delta pqr$ ("$\in$" = "innerhalb oder Rand")
⇒ p_i in Konflikt mit Δpqr

Beh.: $\overline{p_i p}$, $\overline{p_i q}$, $\overline{p_i r}$
are (the new) Delaunay edges in D_i
sind Delaunay-Kanten!
(also in D_i)



Bew.: wir konstruieren einen Kreis, der nur p_i und r berührt.
Starte mit $\bigcirc pqr$, bewege dessen M.punkt c senkrecht zur Tangente in r auf r zu, bis er genau r und p_i berührt; dieser Kreis befindet sich innerhalb $\bigcirc pqr$ ⇒ Beh. Analog für $\overline{p_i p}$ und $\overline{p_i q}$.





Was ist mit den Dreiecken adjazent zu dem (alten) Dreieck Δpqr ?

dann: p_i in Konflikt mit Δpqs.

Beh.: $\overline{pq}$ wird nie wieder Delaunay-Kante

Klar, denn jeder Kreis durch p, q enthält p_i oder s oder beide.

Idee: $\overline{pq}$ flippen

Beh.: $\overline{p_i s}$ ist Delaunay-Kante

Bew.: $\overline{pq}$ ist flippable; nur $p_i \in O_{pqs}$, da vorher Delaunay; schrumpfe O_{pqs}, halte dabei tangentialen Kontakt in s

$\Rightarrow$ Kreis, der nur p_i, s berührt $\Rightarrow$ Beh.

Es ergibt sich folgendes Vorgehen.

Definiere "Wellenfront" $W \subseteq E_{D_{i-1}}$;

p_i hinzufügen $\Rightarrow$ Kanten $\overline{p_i p}, \overline{p_i q}, \overline{p_i r} \in E_{D_i}$,

initialisiere $W := \{\overline{pq}, \overline{qr}, \overline{rp}\}$;

betrachte reihum alle $e = (p, q) \in W$:

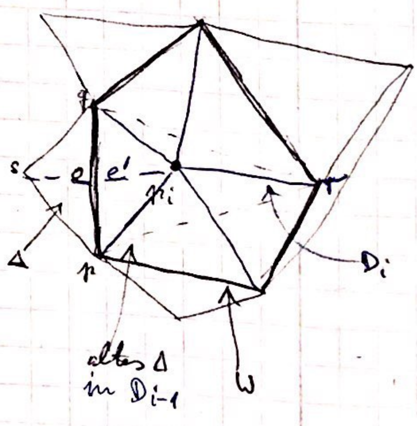
  sei Δpqs = Dreieck inzident zu e und auf der anderen Seite als p_i

  falls e flippable ist:

    falls $p_i \in O_{pqs}$:

      flippe $e \rightarrow e'$

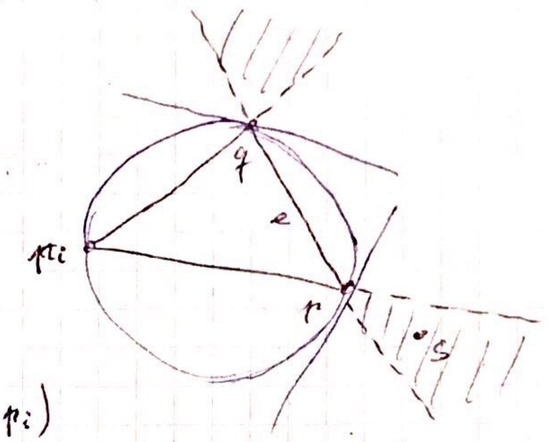
      füge $\overline{ps}, \overline{qs}$ zu W hinzu



Beh.: falls $e = \overline{pq}$ nicht flippable

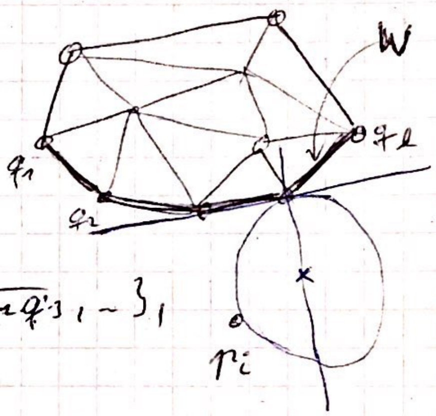
$\Rightarrow$ s nicht in Konflikt mit $\Delta p_i pq$

Bew.: e nicht flippable ⇒
r, q, p_i, s nicht konvex ⇒
s muß in den schraffierten Gebieten liegen (oBdA liegt s auf der anderen Seite von e bzgl p_i)



⇒ egal, wie eng sich die Tangenten an $\bigcirc_{rqp_i}$ in r/q an $\overline{rq}$ anschmiegen, $s \notin \bigcirc_{rqp_i}$

Fall 2: $p_i \notin CH(p_1, \dots, p_{i-1})$
Seien $q_1, \dots, q_k$ die Pkte aus D_{i-1}, die p_i "sieht".
Beh.: alle $\overline{q_i p_i}$ sind Delaunay-Kanten
Bew.: man kann leicht einen Kreis konstr., der nur q_i, p_i berührt (s. Zeichnung).



Initialisiere die Wellenfront $W := \{\overline{q_1q_2}, \overline{q_2q_3}, \dots\}$, dann weiter wie in Fall 1.

Die wesentlichen Schritte im Algo:

1. Das "point location problem":
   hier: welches Dreieck von D_{i-1} enthält p_i?
2. Ist $p_i \in O_{pqr}$? = Der In-Circle-Test

Berechnung des In-Circle-Tests:

Geg.: p, q, r und $s \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: Ist s innerhalb / außerhalb O_{pqr}?

Pkt $s = (s_x, s_y)$ liegt auf O_{pqr} $\Leftrightarrow$

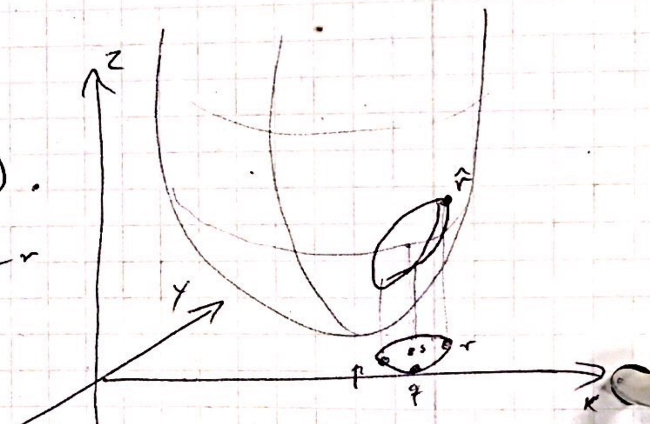
$\| s - m \|^2 = \ell^2$ $\Leftrightarrow$

$s_x^2 + s_y^2 - 2 m_x s_x - 2 m_y s_y + m_x^2 + m_y^2 = \ell^2$

wobei m und ℓ von p, q, r abhängen.

Betrachte jetzt die Projektion auf das Paraboloid $z = x^2 + y^2$,

also $p \mapsto \hat{p} = (p_x, p_y, p_x^2 + p_y^2)$.



curious fact

Beobachtung: für alle s auf O_{pqr} gilt

$$\hat{s} \cdot n - d = 0$$

mit

$$n = \begin{pmatrix} -2 m_x \\ -2 m_y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = m_x^2 + m_y^2 - \ell^2 \; !$$

M.a.W: alle Pkte, projiziert von O_{pqr} auf das Paraboloid liegen in einer Ebene!

Lemma:

Seien $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ positiv orientiert. s ist innerhalb O_{pqr} $\Leftrightarrow$

$\hat{s}$ liegt unterhalb der Ebene durch $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}$ $\Leftrightarrow$

Tetraeder $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}, \hat{s}$ ist negativ orientiert $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} p_x & p_y & p_x^2 + p_y^2 & 1 \\ q_x & q_y & q_x^2 + q_y^2 & 1 \\ r_x & r_y & r_x^2 + r_y^2 & 1 \\ s_x & s_y & s_x^2 + s_y^2 & 1 \end{vmatrix} < 0 .$$

(Analog: "auf" = "$=0$", "außerhalb" = ">0", Analog im $\mathbb{R}^d$.)

Zum Point-Location-Problem:
Mit brute-force-Methode ergibt sich Laufzeit $O(n^2)$.
Mit Hilfsdatenstruktur $\rightarrow$ $O(n \log n)$ erwartete Zeit.
(Diese Hilfsdatenstruktur ist ein DAG, in dem im Prinzip die Historie der Delaunay-Konstr. steht; damit kann man das Dreieck im Durchschnitt schnell finden, $O(\log n)$; das klappt, weil der durchschnittliche Grad von Vertices in einer Triangulierung $= 6$ ist.)
In der Praxis: ein "Walk" durch das $D(S)$ ist einfacher.