Aufgabe 4 Quaternionen (14 Punkte)

Rotieren Sie den Punkt $\mathbf{P} = (-2, 1, 0)$ zweimal mit Hilfe von **verketteten Quaternionen**. Zuerst um den Winkel Φ_1 um die Achse $\hat{\mathbf{v}}_1$ und anschließend um den Winkel Φ_2 um die Achse $\hat{\mathbf{v}}_2$.

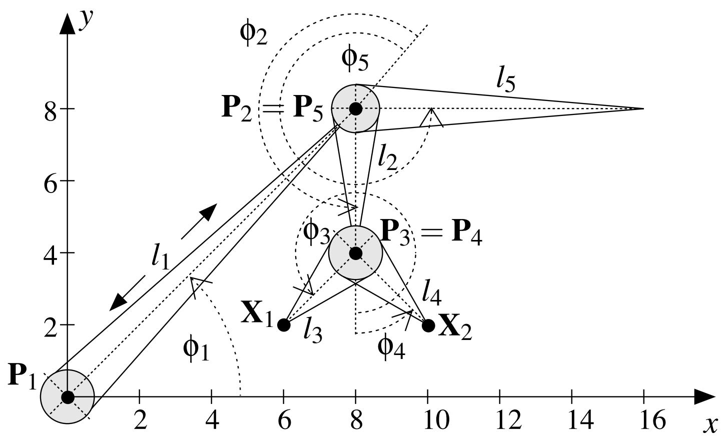
$$\Phi_1 = \frac{\pi}{2}, \Phi_2 = \pi, \hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie hierzu zunächst alle benötigten Quaternionen ($\underline{\mathbf{q}}$, $\overline{\underline{\mathbf{q}}}$, $\underline{\mathbf{q}}_P$) für die verkettete Rotation bzw. den Punkt.

b) Führen Sie nun die Rotation aus und bestimmen Sie den rotierten Punkt $\mathbf{P}'$.

c) Wie lauten die resultierende Rotationsachse $\hat{\mathbf{v}}_{1,2}$ und der resultierende Winkel $\Phi_{1,2}$?

Aufgabe 5 2D-Skelettanimation (24 Punkte)



Gegeben sei das abgebildete zweidimensionale, mehrgliedrige Skelettmodell mit folgenden Werten:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \phi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \phi_2 = \pi + \frac{\pi}{4}, \quad \phi_3 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$l_1 = 8\sqrt{2}, \quad l_2 = 4, \quad l_3 = 2\sqrt{2}, \quad l_4 = 2\sqrt{2}$$

7.1. Berechnen Sie den Endeffektor $\mathbf{X}_1$, indem Sie die Zwischenpunkte $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ *sukzessive in globalen Koordinaten* berechnen.

7.2. Geben Sie eine *Hierarchie von Transformationen* für das gegebene Modell an, mit denen die lokalen Koordinatensysteme der einzelnen Segmente berechnet werden können.
Hinweis: Verwenden Sie die folgenden Bezeichner.
$T(x, y)$: Translation
$R(\phi)$: Rotation um den Mittelpunkt

7.3. Geben Sie den *Arbeitsbereich* des Endeffektors $\mathbf{X}_1$ an für die gegebenen Längen und Winkel. Begründen Sie kurz Ihre Behauptung.