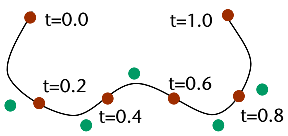
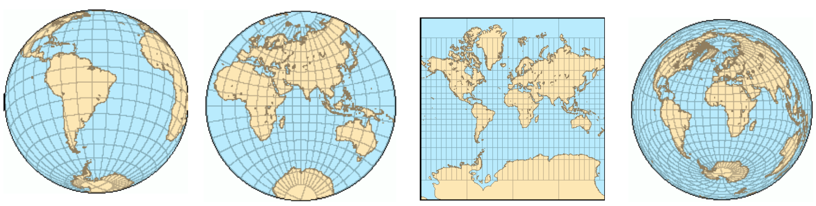
Computer-Graphik I
Parametrisierung

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

Frühe Beispiele / Motivation

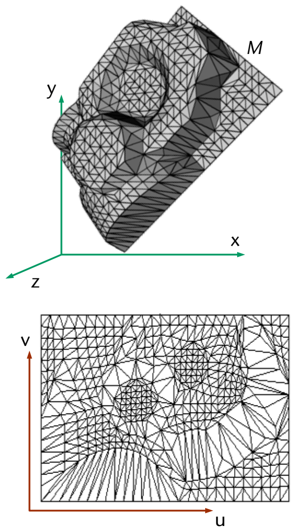
- Beispiele für Parametrisierung:
  - Parameter *t* auf der Geraden
  - Knotenvektor bei B-Splines
  - *u*,*v*-Parameter bei Tensorproduktflächen
  - Koordinaten auf der Weltkugel



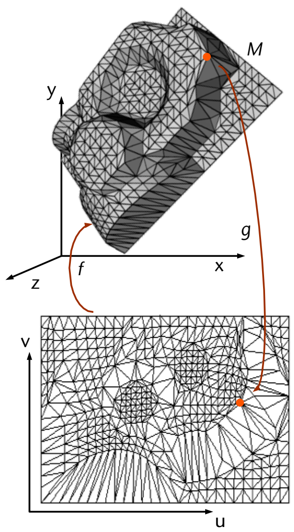


Notation / Begriffe

- Definition:
  Gegeben eine Menge von Punkten
  $V = \{P_1, \ldots, P_N\} \subset \mathbb{R}^3$.
  Ein Dreiecks-Mesh über V ist eine Menge von Dreiecken $M = \{T_1, \ldots, T_N\}$, mit $T_i = \{P_j, P_k, P_l\} \subset V$, wobei sich jeweils zwei Dreiecke höchstens in genau einer gemeinsamen Kante schneiden.



- Definition:
  Eine Parametrisierung ist eine Abbildung
  $$g \ : \ V \ \rightarrow \ \mathbb{R}^2$$
- Erwünschte Eigenschaften:
  - $g(M)$ soll überschneidungsfrei sein
  - Lineare Reproduktion: wenn M schon in der Ebene liegt, d.h. $P_i = (x_i, y_i, 0)$, dann soll die Parametrisierungsmethode $g(P_i) = (x_i, y_i)$, liefern.
- Die Funktion g kann man durch lineare Interpolation innerhalb der Dreiecke fortsetzen zu einer stückweise linearen Fkt. auf ganz M
  - Vorteil: $f = g^{-1}$ ist dann auch stückweise linear auf $g(M)$ und trivial zu berechnen

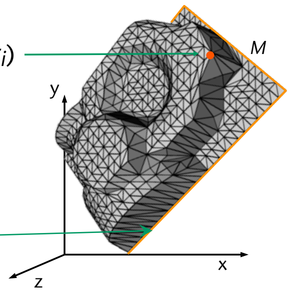


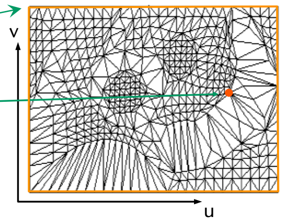
- Notation:
  - Vertices P_i , Parameterpunkte p_i
  - $V = V_I \cup V_B$

    $V_I = \{P_1, \ldots, P_n\}$

    $V_B = \{P_{n+1}, \ldots, P_{n+b}\}$
  - $N = n + b$
  - Das Randpolygon im Parameterbereich $= p_{n+1}, \ldots, p_{n+b}$
  - $g(P_i) = p_i = (u_i, v_i)$
  - Menge der Kanten:

    $E = \{(P_i, P_j) \mid P_i, P_j \text{ sind Nachbarn } \}$





Motivierung der Parametrisierungsmethode

1. Lege das Randpolygon $p_{n+1}, \ldots, p_{n+b}$ fest

- Wie bestimmt man die inneren p_i ?
- Idee: "Kanten = Federn"
  - Annahme: Ruhelänge = 0, Potentialenergie = $\frac{1}{2}Ds^2$
    - D = Federkonstante, s = Länge der Feder
  - Setze also $D_{ij} > 0$ für alle Kanten zwischen p_i und p_j, für alle anderen setze $D_{ij} = 0$
  - Verallgemeinerung: wir lassen $D_{ij} \neq D_{ji}$ zu!
- Definiere die Gesamtenergie einer Parametrisierung:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} D_{ij} \|p_i - p_j\|^2$$

- Ziel: minimiere diese Energie (*penalty function*)

- Partielle Ableitungen von E sind

$$\forall i = 1 \dots n: \ \frac{\partial E}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{N} D_{ij}(p_i - p_j)$$

- 0-Setzen liefert

$$\forall i = 1 \dots n: \ p_i \sum_{j=1}^{N} D_{ij} = \sum_{j=1}^{N} D_{ij} p_j$$

- M.a.W.: jeder innere Parameterpunkt muß eine konvexe Kombination seiner Nachbarn sein, und zwar

$$\forall i = 1 \dots n: \ p_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} p_j \ , \quad \text{mit} \ \ \lambda_{ij} = \frac{D_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} D_{ik}}$$

- Rechte Seite auseinanderziehen liefert

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_j + \sum_{j=n+1}^{N} \lambda_{ij} p_j$$

und damit

$$p_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_j = \sum_{j=n+1}^{N} \lambda_{ij} p_j$$

- Das sind zwei simple LGSe mit

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad \text{und} \quad A\mathbf{v} = \mathbf{c}$$

und

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \quad \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ -\lambda_{ij} & , (p_i, p_j) \in E \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \ , \ b_i = \sum_{j=n+1}^{N} \lambda_{ij} u_j \ , \ c_i = \sum_{j=n+1}^{N} \lambda_{ij} v_j$$

2. Schritt bei der Parametrisierung: λ's wählen

- Wähle λ's so, daß

$$\forall (i,j) \in E : \ \lambda_{ij} > 0 \quad , \quad \forall (i,j) \notin E : \ \lambda_{ij} = 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} = 1$$

$$i = 1 \ldots n \, , \quad j = 1 \ldots N$$

- Satz:

  Werden die λ's wie oben gewählt,
  dann ist die Matrix *A* nicht singulär.

- M.a.W.: die LGSe sind eindeutig lösbar.

Beweis

- Definition:
  Eine *nxn*-Matrix *A* heißt zerlegbar ⇔
  es gibt eine Permutationsmatrix *P*, so daß

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

  wobei *B* und *D* wieder quadratische Matrizen sind.
  Sonst heißt sie unzerlegbar.

- Bemerkung: in unserer Anwendung entspricht *P* einer Umnummerierung der Vertices / Parameterpunkte.

- In unserem Fall: A hat die spezielle Form
$$A = I - \Lambda$$
wobei
$$\Lambda = (\lambda_{ij}),\ i,j = 1 \dots n, \quad \lambda_{ij} \geq 0$$
- Behauptung: Λ ist unzerlegbar
- Beweis:
  1. Wäre Λ zerlegbar, dann gäbe es ein Umnummerierung der Vertices, so daß
  $$\Lambda = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
  2. Folge: der Graph (d.h., das Mesh) würde aus 2 nicht-zusammenhängenden Teilen bestehen → W!

- Satz aus der Matrizentheorie (o. Bew.):
Sei A eine unzerlegbaren Matrix mit $A \geq 0$.
Bezeichne die Zeilensummen mit
$$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ , \quad i = 1 \dots n$$
Sei r der maximale Eigenwert von A.
Dann gilt
$$r \leq \max_{i=1 \dots n} s_i$$

- Zum Beweis des Satzes, daß A nicht singulär ist:
  - Z.z.:

$$Aw = 0 \Leftrightarrow w = 0$$

  - Einsetzen:

$$(I - \Lambda)w = 0 \Leftrightarrow \Lambda w = w$$

  - Annahme: es gäbe solch ein $w \neq 0$
  - Dann wäre 1 ein Eigenwert von Λ
  - Aber:

$$\forall i = 1 \dots n : \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} < 1$$

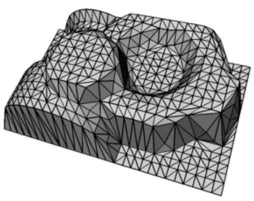
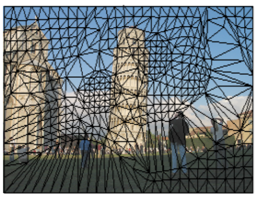
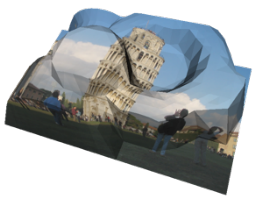
  - Folge aus dem Satz aus Matrizentheorie: max. Eigenwert < 1 → W!

Konkrete Wahl der λ's

- Naïve Möglichkeit [1963, graph drawing]:
  - Setze $\lambda_{ij} = 1 / d_i$ für jedes P_i, wobei d_i = Grad des Punktes = Anzahl seiner Nachbarn
  - M.a.W: jedes p_i ist der Schwerpunkt seiner Nachbarn
  - → "Uniforme" Parametrisierung
    - Analogie zur uniformen Parametrisierung bei B-Splines
- Chord length parametrization: setze $w_{ij} = 1/\|P_j - P_i\|$

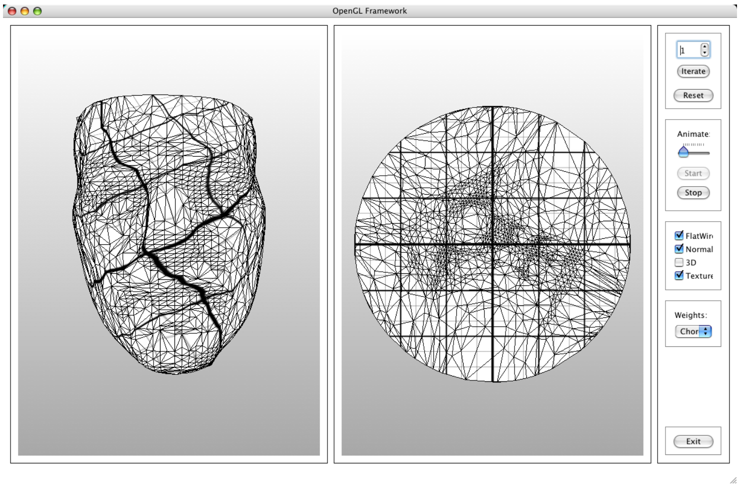
- Mean value coordinates (MVC):
  - Setze die λ_{ij} = den mean value coordinates von P_i bzgl. seiner direkten Nachbarn P_j (im 3D!)
  - Alternative:
    - bestimme für jedes P_i seine direkten Nachbarn P_j
    - lege eine Ausgleichsebene durch diese Punkte
    - projiziere diese Punkte auf die Ebene
    - bestimme die mean value coordinates von P_i bzgl. P_j in dieser Ebene
- Jetzt wird auch klar, warum wir $\lambda_{ij} \neq \lambda_{ji}$ zulassen wollten!

Anwendung der Parametrisierung: Texturierung

Es gibt viele weitere Anwendungen der Parametrisierung, denn:
Parametrisierung erlaubt es uns,
auf einem Mesh zu operieren, als ob es flach wäre,
d.h., nur mit 2D-Koordinaten .

Demo


OpenGL Framework
Iterate
Reset
Animate:
Start
Stop
FlatWin
Normal
3D
Texture
Weights:
Chor
Exit