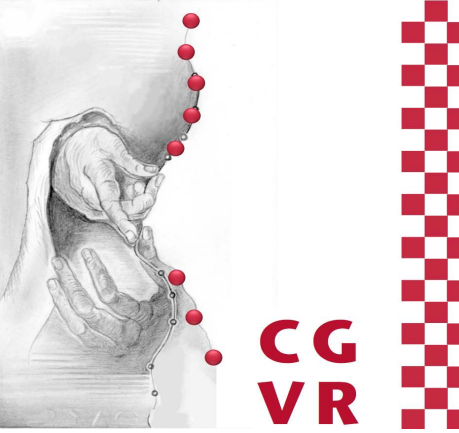
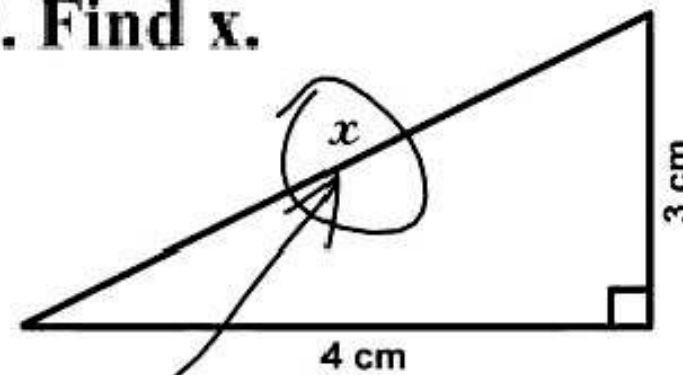




Computergraphik

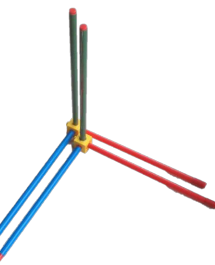
Kurze Wiederholung in Geometrie

3. Find x .



Here it is

G. Zachmann
University of Bremen, Germany
cgvr.cs.uni-bremen.de



Vektoren

- Notation: in dieser VL schreiben wir Vektoren mit kleinen fetten Buchstaben:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

- Betrag / Länge:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a$$

- Beweis:

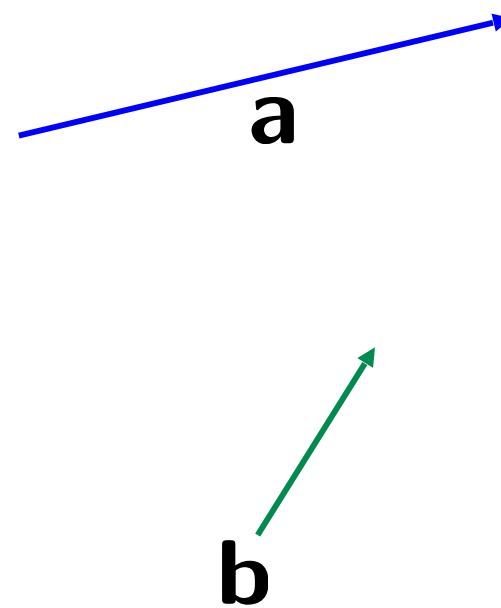
Historische Randnotiz

- Der *Satz des Pythagoras* war schon 1400 Jahre vor Pythagoras bekannt

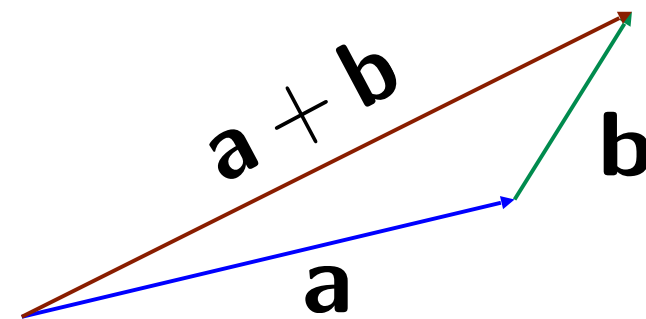


Babylonische Tafel mit dem
»Satz des Pythagoras«,
Mesopotamien,
19. - 17. Jh. v. Chr.
Peabody Museum of
Natural History, Yale,
New Haven,
[Sonderausstellung im
Liebighaus Frankfurt, 2023]

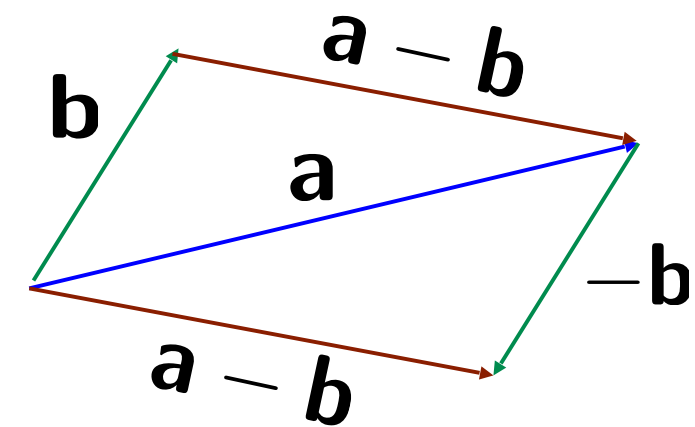
- Geometrische Interpretation der Vektor-Addition und Vektor-Subtraktion:



Addition

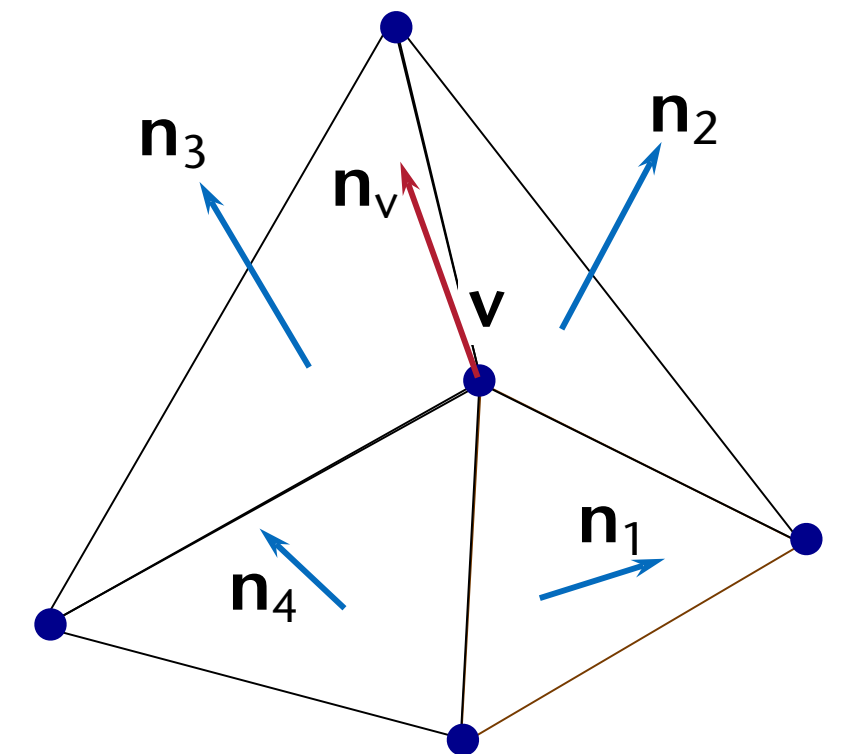
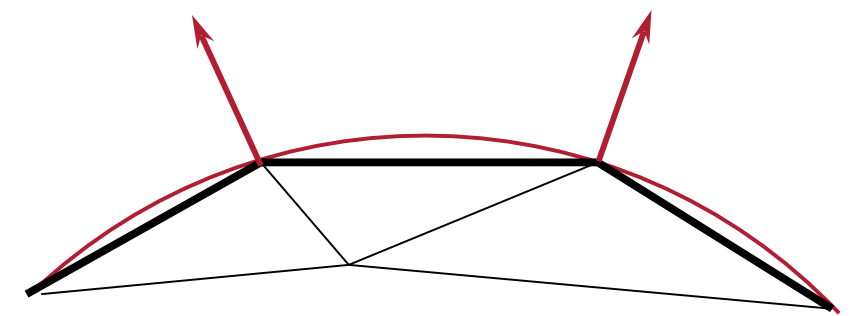
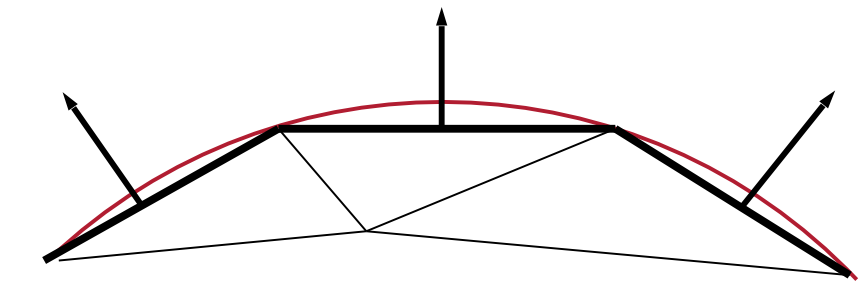


Subtraktion



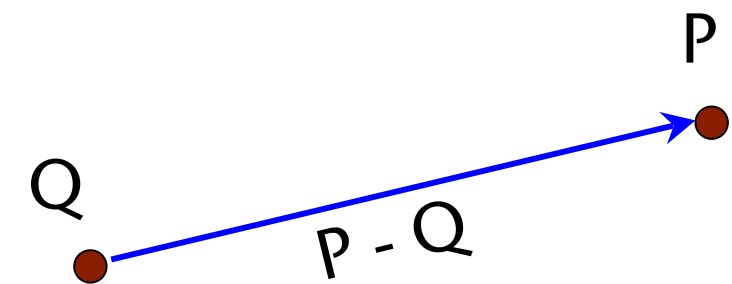
Berechnung der Normalen der Eckpunkte eines 3D-Modells

- Die Dreiecke bilden nur eine **Annäherung** an die wirkliche (unbekannte) Oberfläche eines Objektes
- An den Vertices hätte man gerne die Normale der ursprünglichen Fläche, nicht der Dreiecke!
- Algorithmus:
 1. Zu Beginn berechne eine Normale für jedes Polygon
 2. Bestimme für jeden Vertex, welche Polygone diesen enthalten (**Inzidenz**)
 3. Bestimme den Mittelwert der Normalen dieser angrenzenden Polygone
 - Einfach aufsummieren, dann normieren



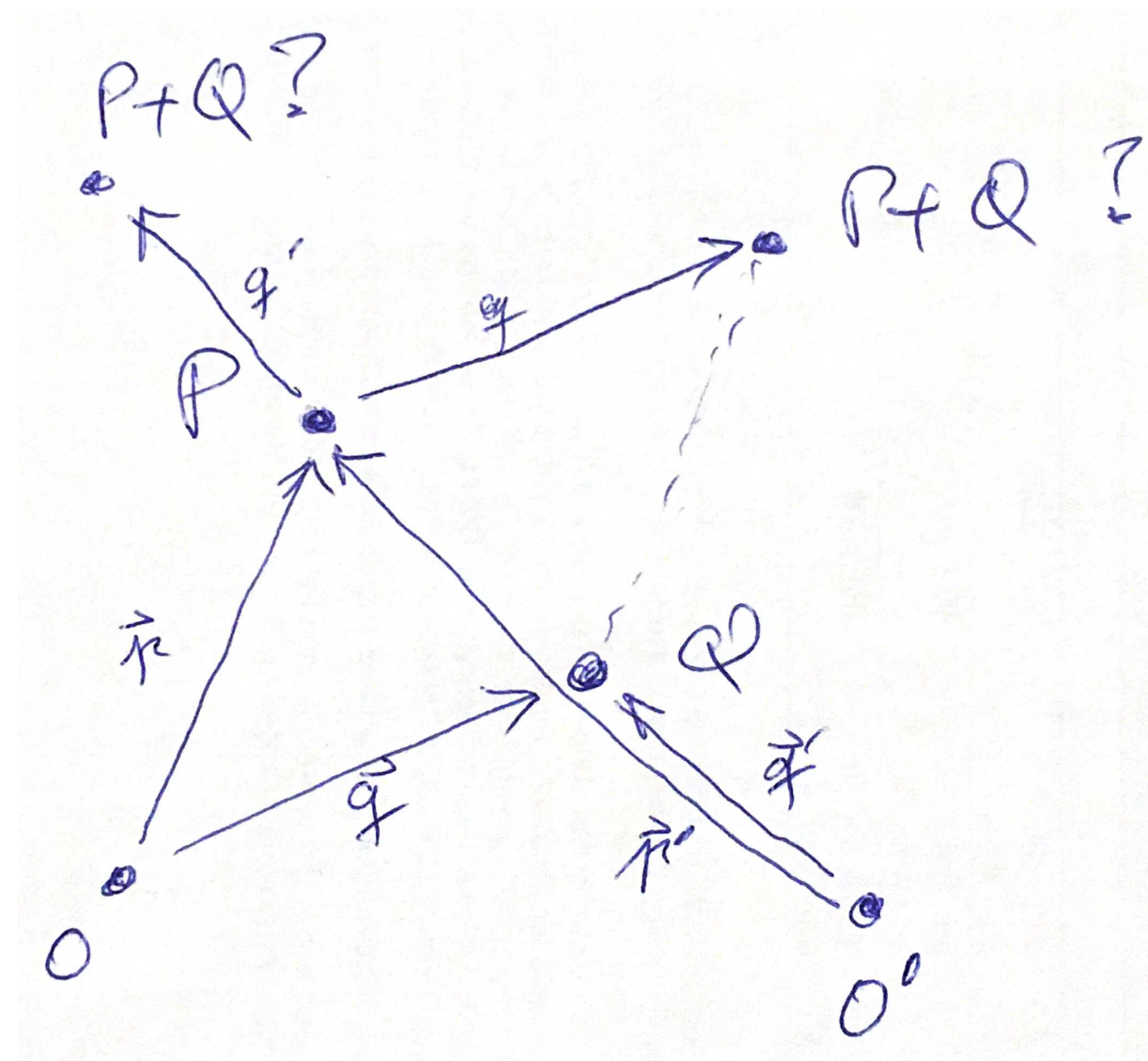
Unterschied zwischen Punkten und Vektoren

- Notation: Punkte mit normalen Großbuchstaben
- Achtung: **Punkt $\neq$ Vektor** !
- Unterschiedliche Bedeutung:
 - Punkt = Ort im Raum
 - Vektor = Richtung + Länge = Verschiebungsoperator (wirkt auf Punkte)
- Merkgeln:
 - Punkt + Vektor = Punkt
 - Vektor + Vektor = Vektor
 - Punkt - Punkt = Vektor (Notation: $\overline{QP}$)
 - Punkt + Punkt = **Nonsense!**
 - Korrespondenz zwischen Punkt und Vektor mittels Ursprungspunkt O :



$$\mathbf{p} = P - O \quad P = O + \mathbf{p}$$

$\mathbf{p}$ heißt **Ortsvektor**



Haken bei der Argumentation: man macht hier schon Gebrauch von einer bestimmten Definition des Additions-Operators.
Übrigens: wenn man diese Argumentation akzeptiert, dann sieht man sehr schön, dass es bei einer baryzentrischen Kombination deswegen gut geht, weil dort die "partition of unity" gegeben ist.

Zumindest, wenn man einfach die Ortsvektoren addieren würde, wäre das Ergebnis nicht invariant bzgl der Wahl des Ursprungs!

Andere Argumentation: ein Additions-Operator auf Punkten müsste invariant gegenüber Verschiebung sein (sonst würden Beweise nicht nur von der relativen Lage der Punkte zueinander abhängen, sondern auch von der absoluten Lage im Raum!).

Betrachte nun zwei Punkte P, Q .

Wir nehmen an $P+Q$ ist definiert und $R = P + Q$.

Erst Verschiebung, dann Addition:

$$\underbrace{(P+*)}_{\text{Verschiebung}} + (Q+*) = (P+Q) + 2* = R + 2* \leftarrow$$

Erst Addition, dann Verschiebung:

$$(P+Q) + * = R + *$$

$\neq$

Das Skalarprodukt (*dot product*)

- Definition: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

- Eine geometrische Bedeutung:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$$

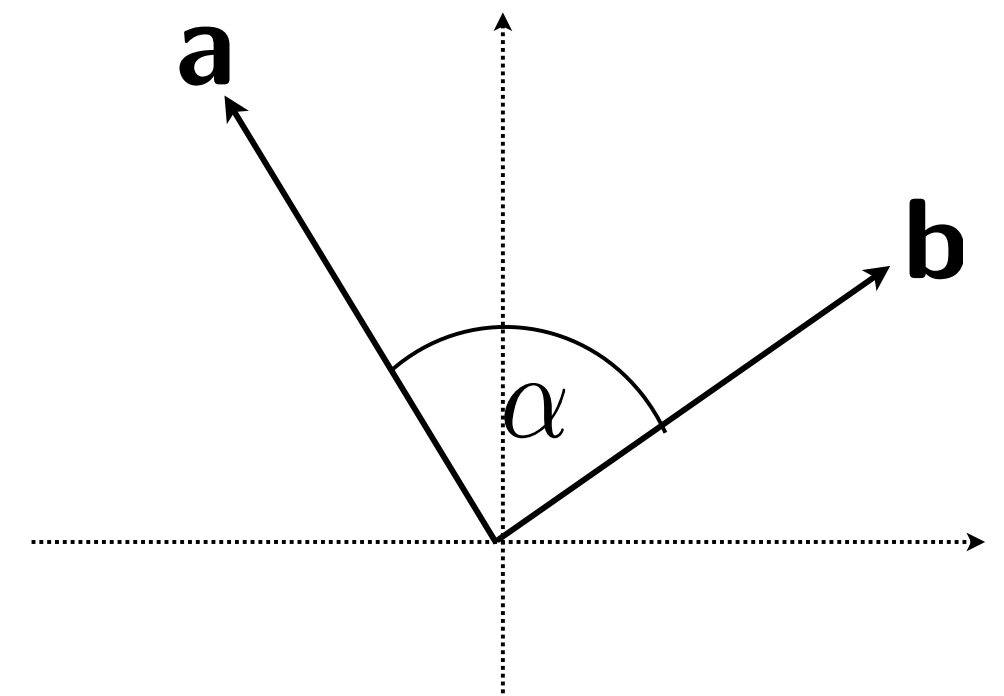
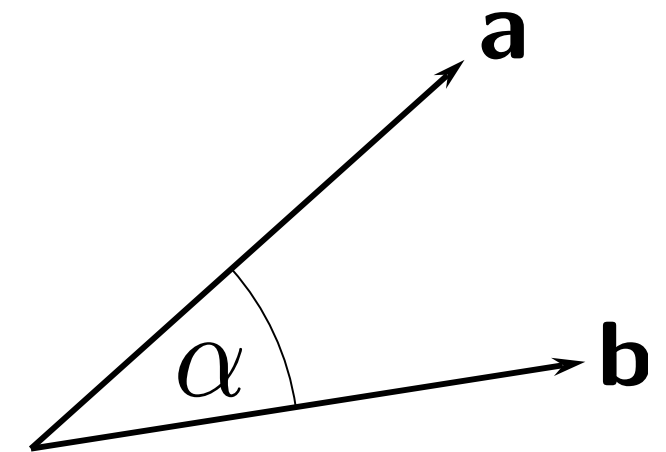
- Beweis (2D):

- Sei θ_a = Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und x-Achse

- Damit ist $\cos \alpha = \cos(\theta_a - \theta_b)$

$$= \cos \theta_a \cos \theta_b + \sin \theta_a \sin \theta_b$$

$$= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} \frac{b_x}{|\mathbf{b}|} + \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} \frac{b_y}{|\mathbf{b}|}$$



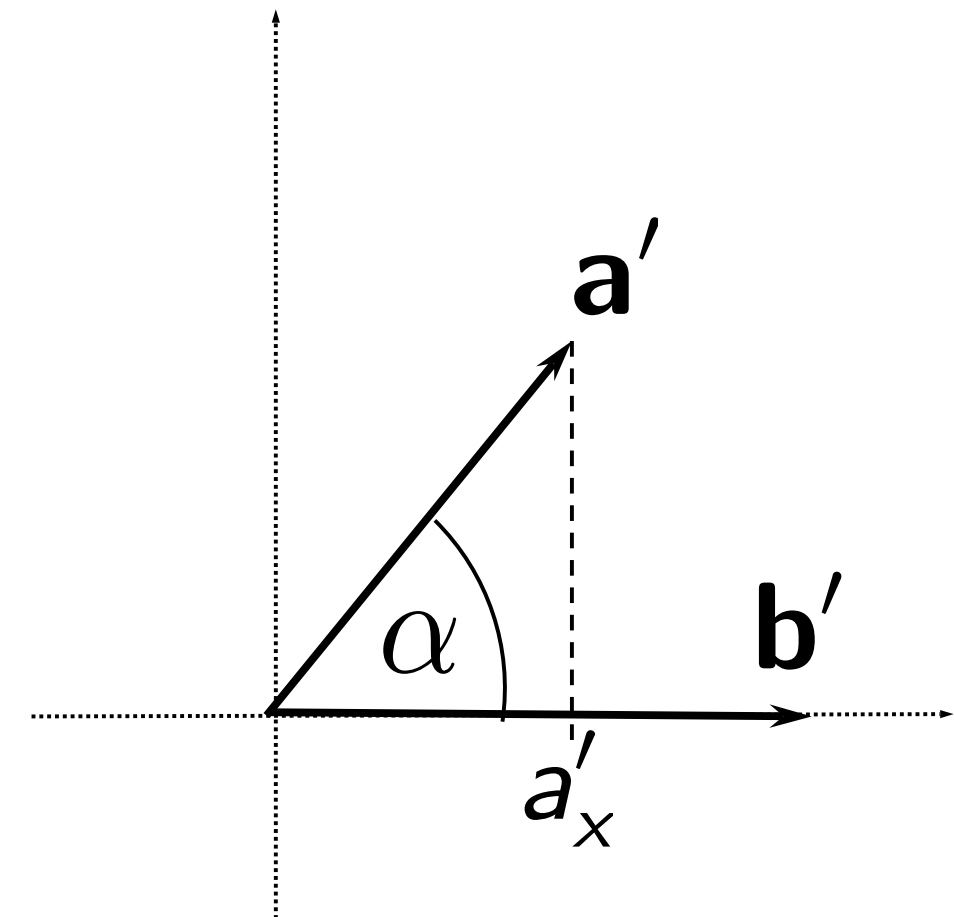
- Alternativer Beweis (n -dimensional):

- Verbinde $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ starr miteinander
- Rotiere beide so, dass $\mathbf{b}$ auf der x-Achse zu liegen kommt $\rightarrow \mathbf{b}'$,
und $\mathbf{a}$ irgendwo in der xy-Ebene $\rightarrow \mathbf{a}'$
(der Winkel α zwischen beiden bleibt unverändert)
- Damit ist $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{a}^T I \mathbf{b} = \mathbf{a}^T R^{-1} R \mathbf{b}$

$$= (\mathbf{a}^T R^T)(R \mathbf{b}) = (R \mathbf{a})^T (R \mathbf{b}) = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}'$$

$$= (a'_x \ a'_y \ 0 \ \dots \ 0) \cdot (b'_x \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$$

$$= a'_x \cdot b'_x = |\mathbf{a}'| \cos \alpha \cdot |\mathbf{b}'| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \alpha$$



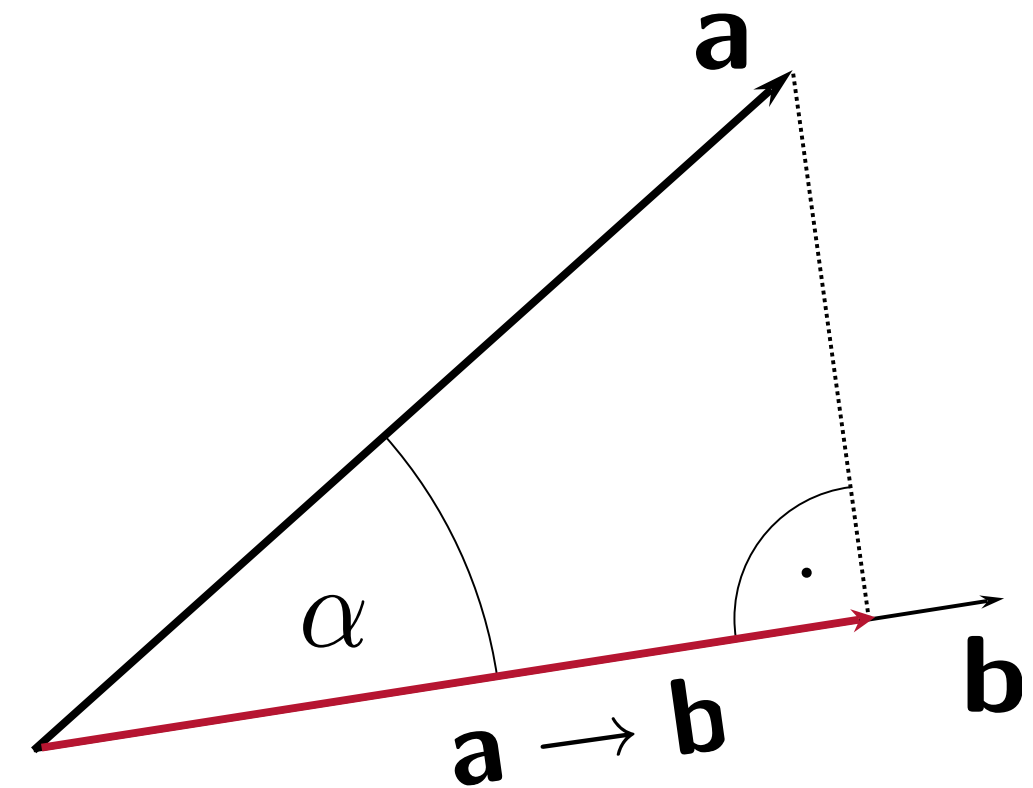
Terminologie

- **Orthogonal Vektoren** = Vektoren sind senkrecht zueinander
- Drei Vektoren sind **koplanar** $\Leftrightarrow$ es gibt eine Ebene, die alle drei Vektoren enthält
- Konstruktion eines dritten, koplanaren Vektors aus **a** und **b**:
- Test, ob die Vektoren **a**, **b**, **c**, coplanar sind?

Weitere geometrische Bedeutung des Skalarproduktes

- Die senkrechte Projektion:

$$|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$



- Mit anderen Worten: das Skalarprodukt mit einem Einheitsvektor lässt sich als senkrechte Projektion auf diesen Einheitsvektor interpretieren;
d.h., falls $|\mathbf{e}| = 1$
dann ist $|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{e}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}$

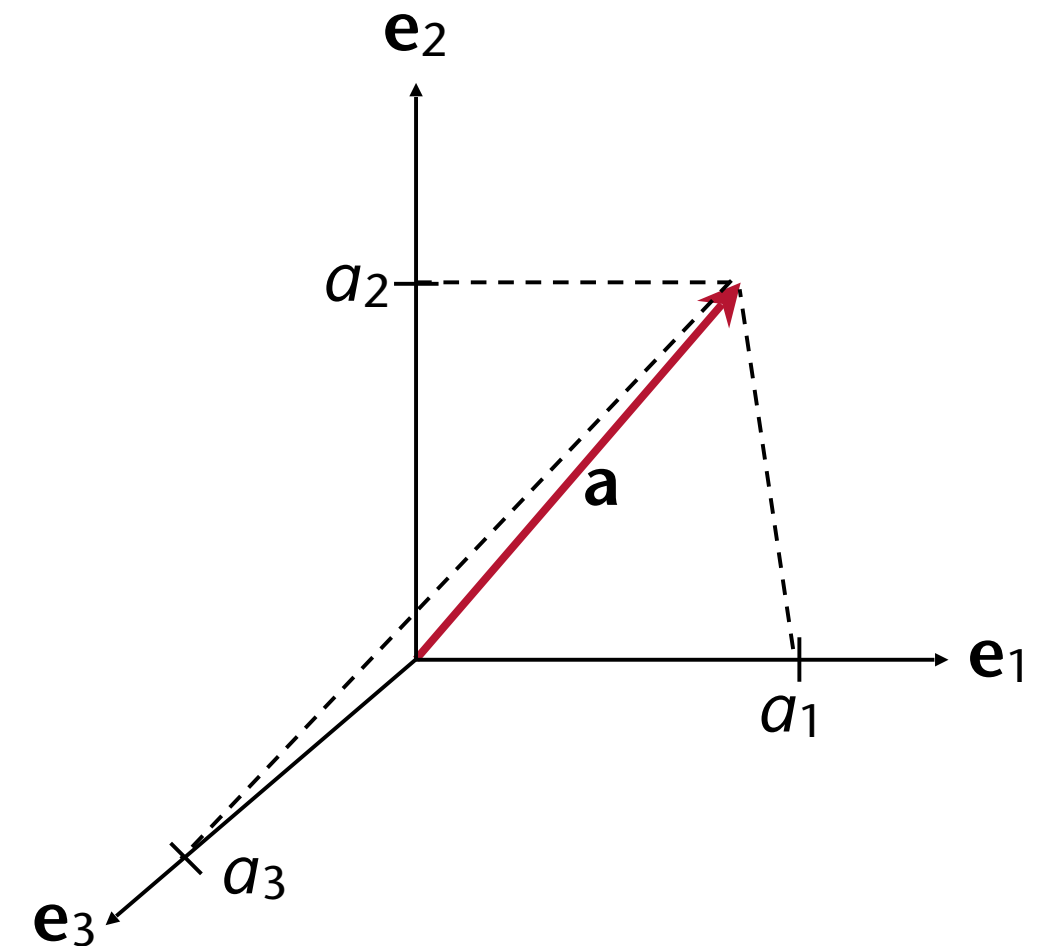
Darstellung eines Vektors bzgl. einer orthogonalen Basis

- Wähle eine Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (Einheitsvektoren!)
- Berechne die Projektionen von $\mathbf{a}$ auf die Achsen:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 =: a_1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 =: a_2$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 =: a_3$$



- Rückgewinnung von $\mathbf{a}$ aus den Koordinaten (a_1, a_2, a_3) :

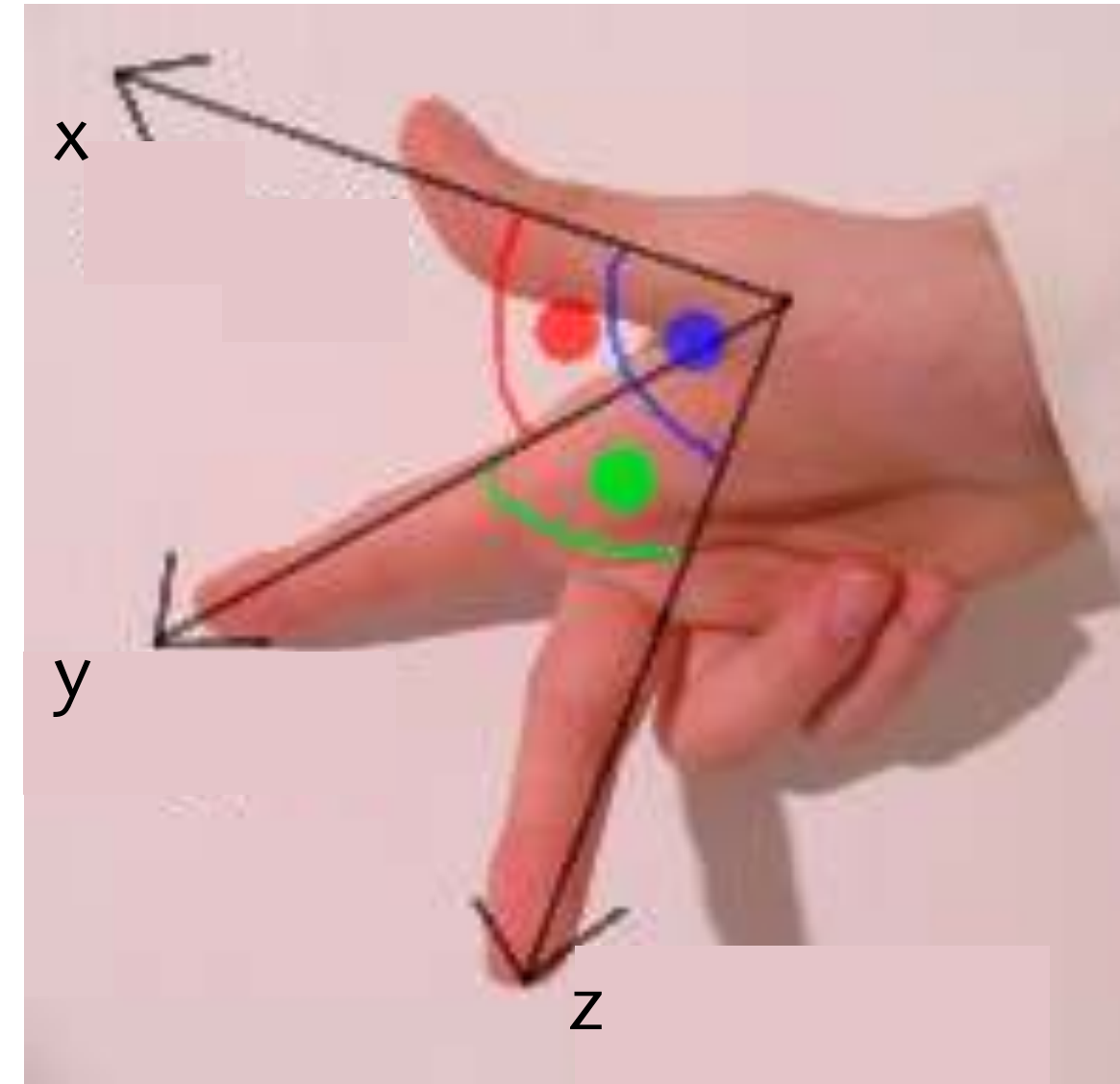
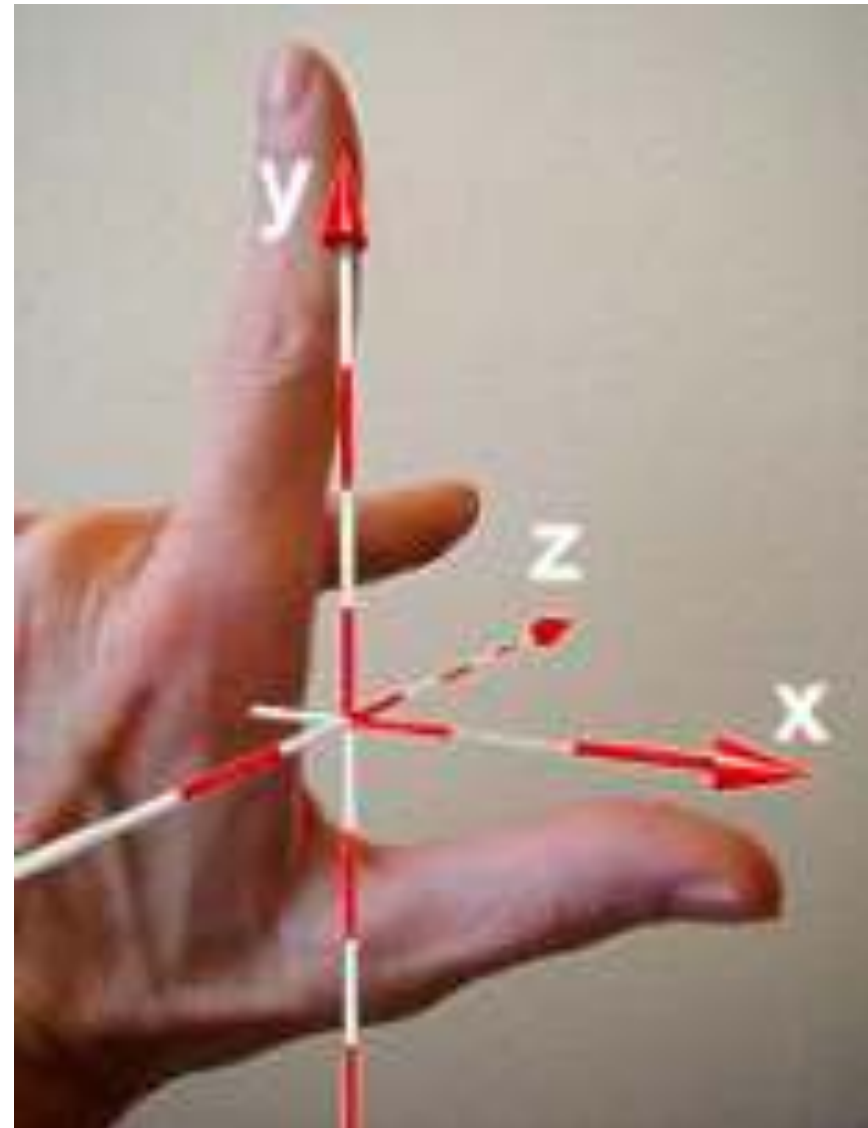
$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Eine Konvention bei 3D-Koordinatensystemen

Conventional
color coding:

X, **Y**, **Z**

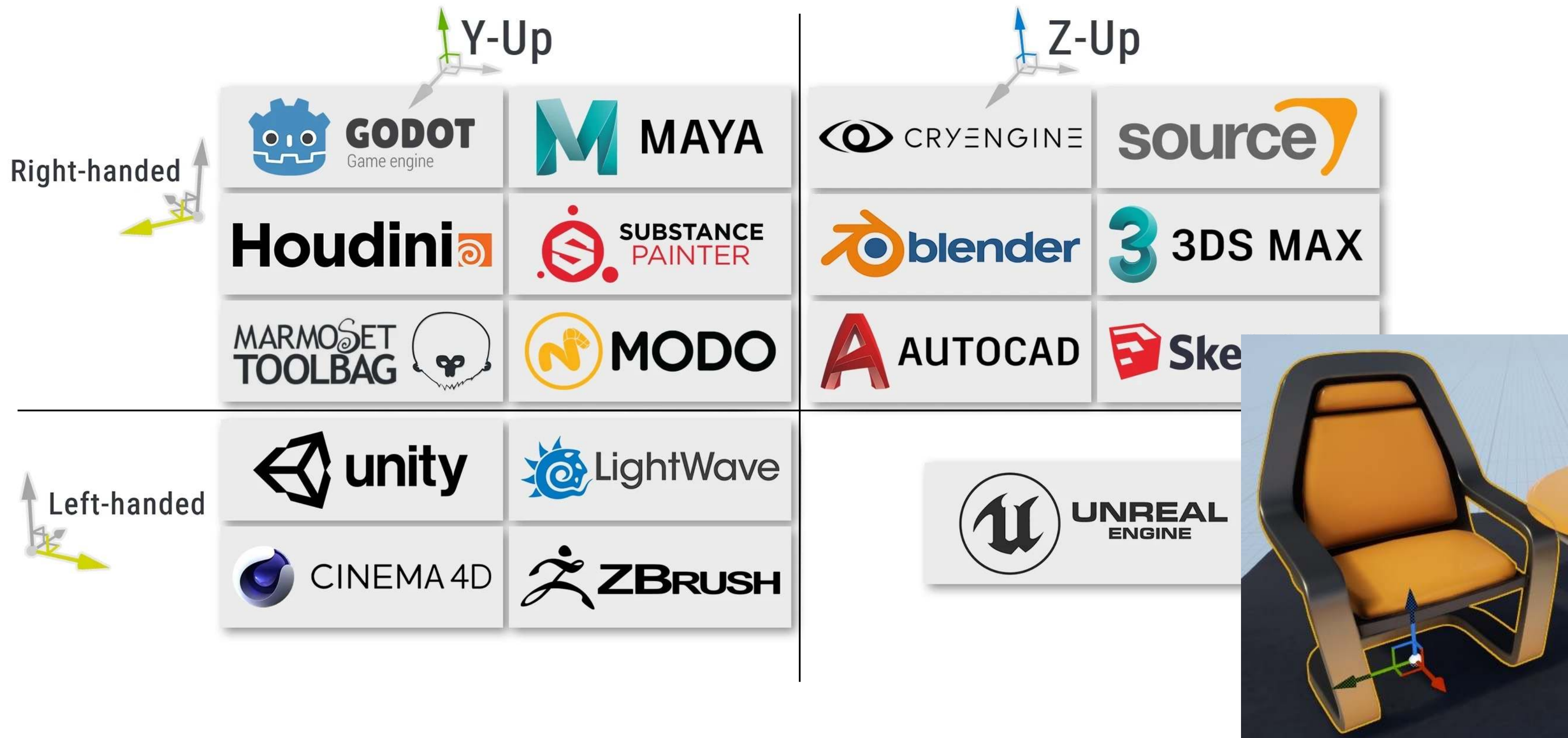
Left handed
system
(Linkssystem)



Right handed
system
(Rechtssystem)

Achtung: wir verwenden *immer* das rechtshändige Koordinatensystem! (außer, es steht etwas anderes da)

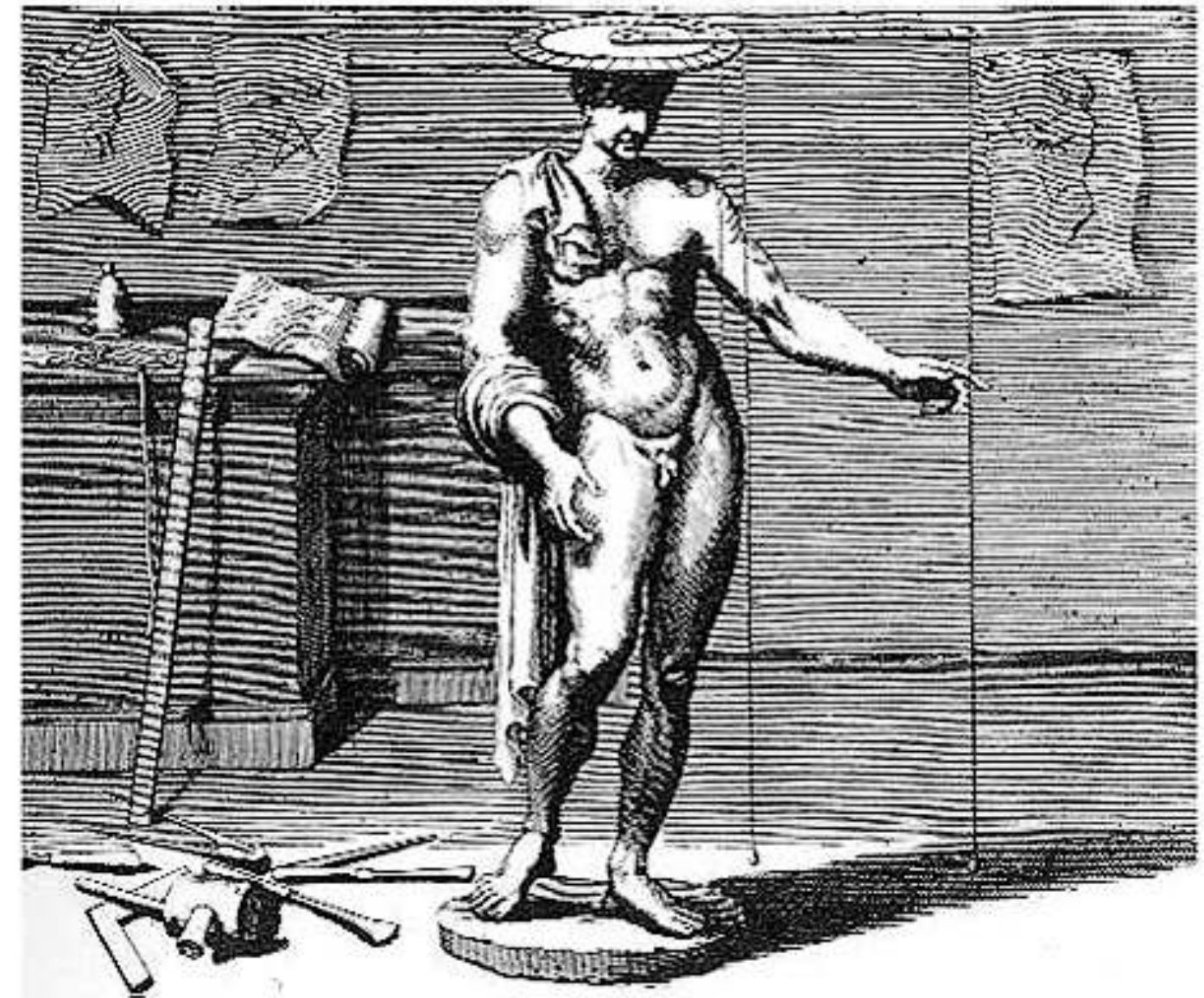
Leider verwenden nicht alle SW-Systeme diese Konvention :-)



Historische Randnotiz: das erste (?) Koordinatensystem



Alberti hat um 1450 Polarkoordinaten beschrieben und eine Karte von Rom in Form einer Tabelle der wichtigen Punkten der Stadt in seinem Buch *Descriptio Urbis Romae* veröffentlicht.



Alberti hat auch Zylinder-Koordinaten beschrieben (in seinem Buch *De Statua*), und eine Vorrichtung, das *finitorium*, mit dem man Statuen "einscannen" und kopieren könnte.

Anwendungsbsp.: Umkugel um 3 Kugeln

Ungleichungen

- Dreiecksungleichung:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

- Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$$

Das Kreuzprodukt (*cross product*)

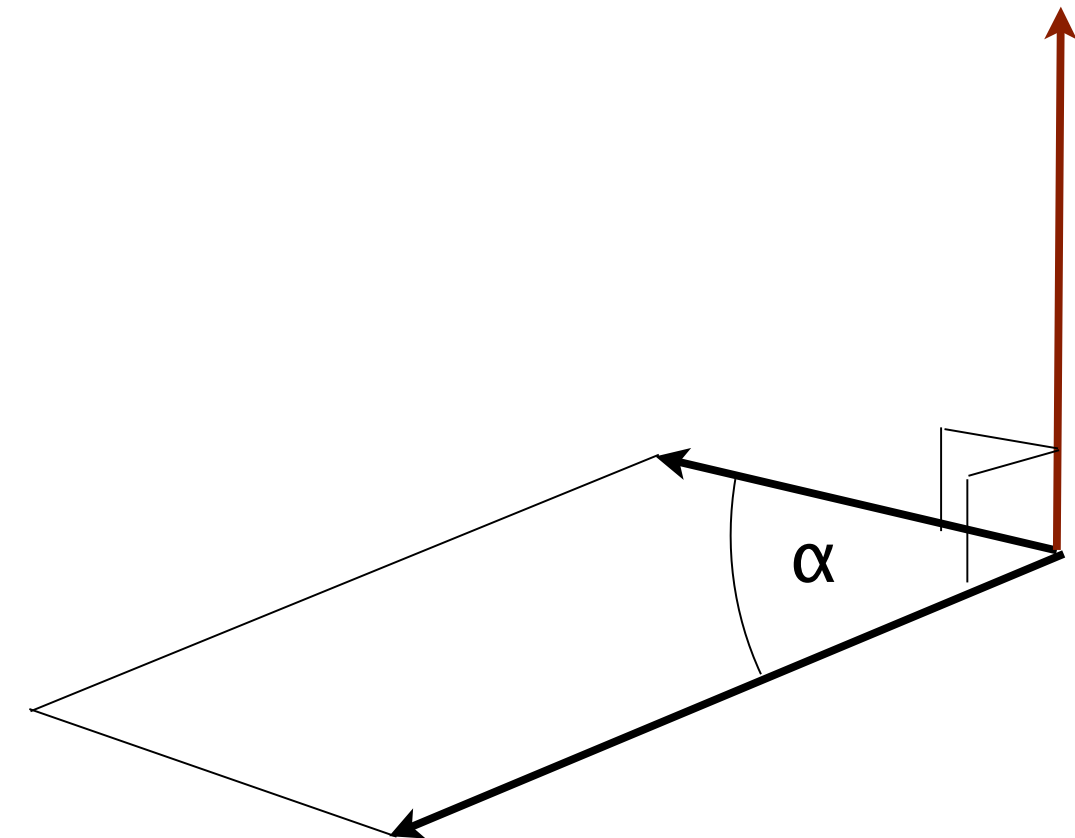
- Definition in 3D:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

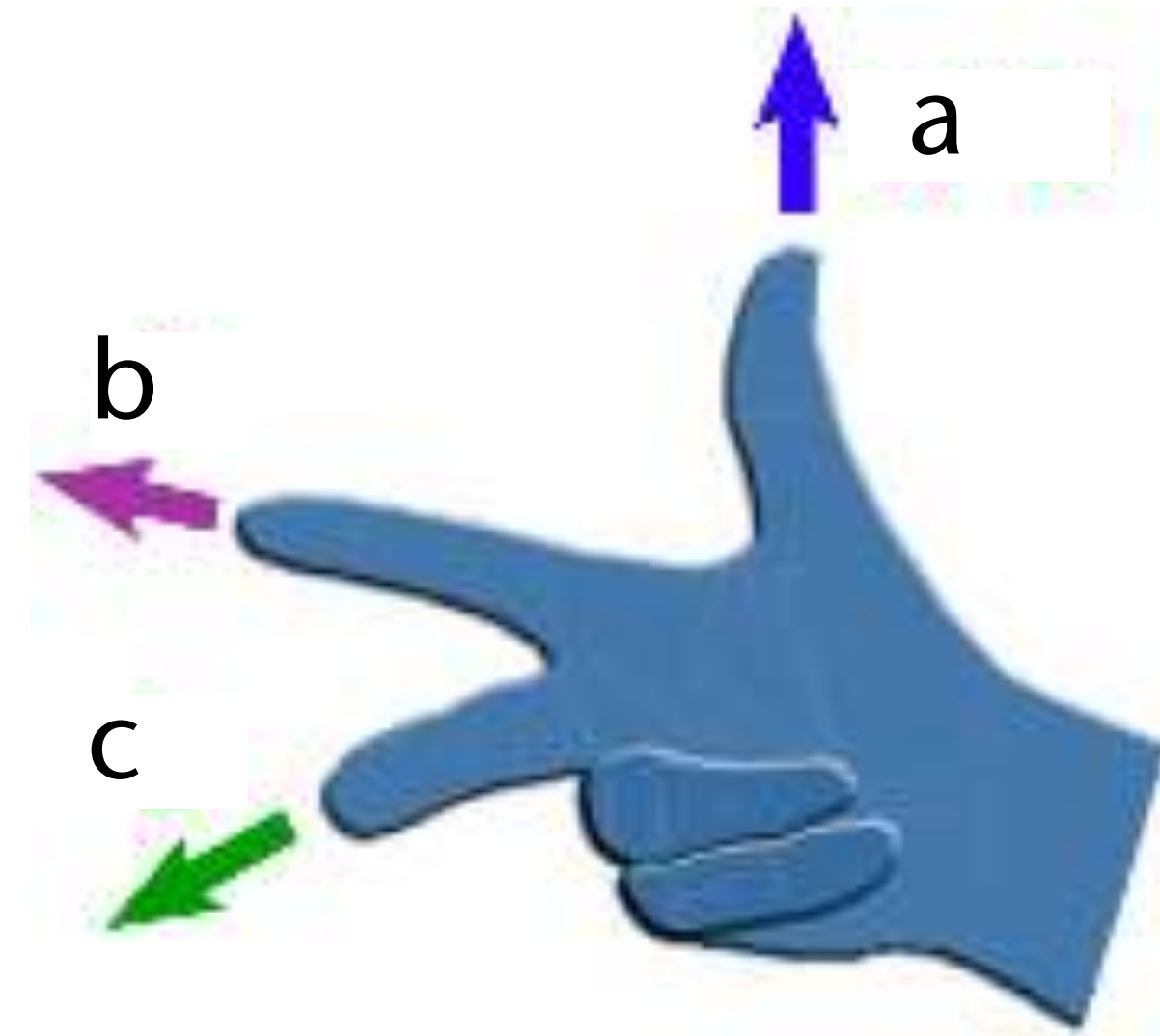
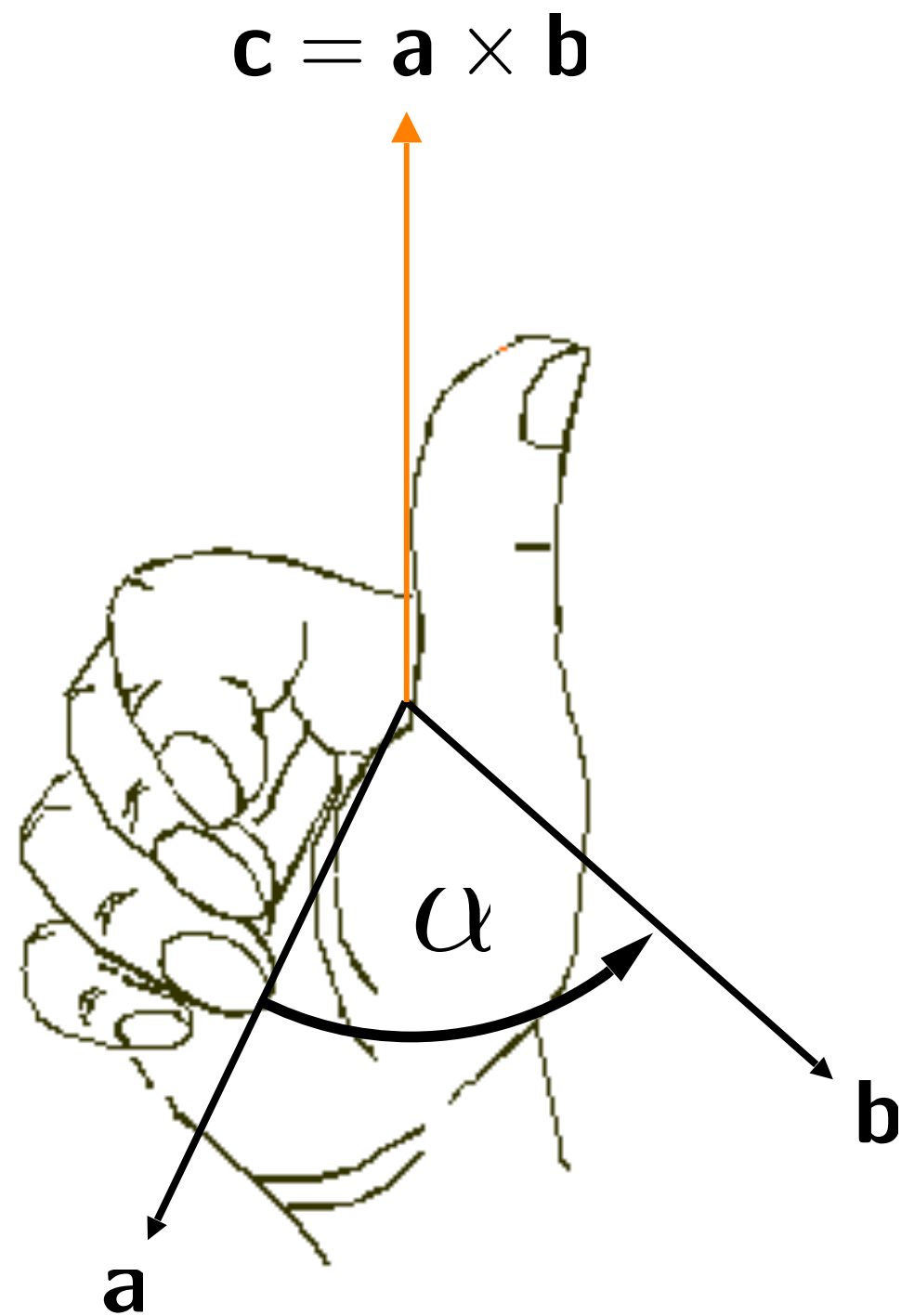
- Ergebnis ist ein Vektor, der senkrecht auf beiden Vektoren steht
- Länge des Vektors = Flächeninhalt des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$$

- Nützlich zur Erstellung von Koordinatensystemen (später mehr)



- Eselsbrücke: **Rechte-Hand-Regeln**



geogebra.org

02 - Geometry recap - Mentimeter

ARSnova

Cross Product Demo - GeoGebra

CREATE CLASS

Cross Product Demo

Author: dshaft

Topic: Multiplication, Vectors

Enter in values for the components of $\vec{a}$ and $\vec{b}$

Click the button to see a demonstration of one method of how to calculate the dot product.

Step 1: Write each vector in a column twice, lining up their components.

Step 2: Remove the topmost and bottom most element from each column.

Step 3: Draw your arrows from left to right down then up for each number in the left column.

Step 4: Record the products that the arrows designate, subtracting the "up" products from the "down ones for each pair. Note that each pair of crossed arrows is used to find one component of the resultant vector.

Step 5: Simplify each component of the resultant vector.

When the demo is finished, click the second button to see an alternate method.

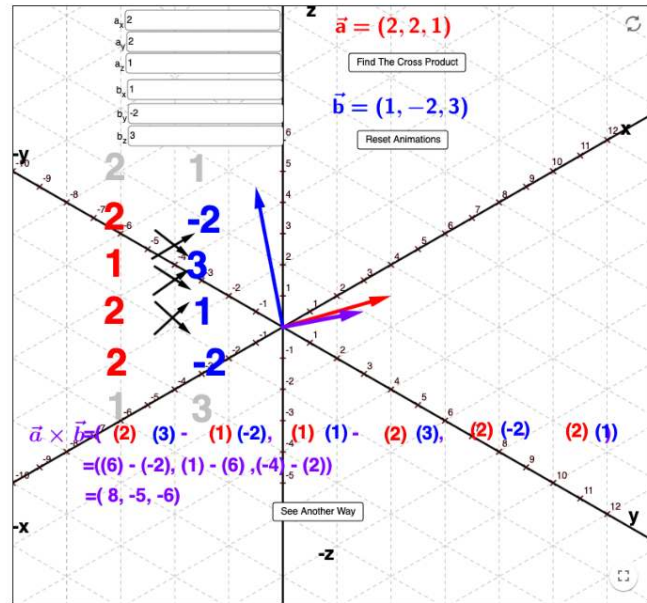
Step 1: Write each vector as a row, one under the other.

Step 2: Cover the x components and calculate the product "down-right" subtract the product "up right"

Step 3: Cover the y components and calculate the product "down-left" subtract the product "up left" **NOTE this is backwards compared to other steps**

Step 4: Cover the z components and calculate the product "down-right" subtract the product "up right"

Step 5: Simplify each component of the resultant vector.



$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k}$

$= ((6) - (-2)) \vec{i} - ((-4) - (-2)) \vec{j} + ((-2) - (4)) \vec{k}$

$= (8) \vec{i} - (-6) \vec{j} + (-6) \vec{k}$

$= (8, -5, -6)$

What do you notice about the components being used to calculate each part of the resultant vector?

Which components are being used from the original vectors to calculate the x-component? The y? The z?

Although it doesn't look like it because it is drawn in 2 dimensions, the resultant vector is perpendicular (or normal) to both of the original vectors. Can you

<https://www.geogebra.org/m/KjAfKEpr>

mathinsight.org

02 - Geometry recap - Mentimeter

ARSnova

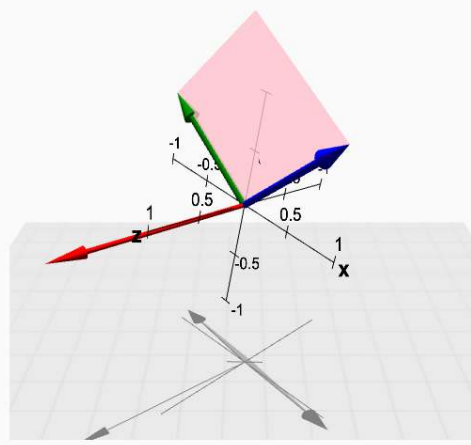
The cross product - Math Insight

Top In threads Links Contact us



This formula shows that the magnitude of the cross product is largest when $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are perpendicular. On the other hand, if $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are parallel or if either vector is the **zero vector**, then the cross product is the zero vector. (It is a good thing that we get the zero vector in these cases so that the above definition still makes sense. If the vectors are parallel or one vector is the zero vector, then there is not a unique line perpendicular to both $\vec{a}$ and $\vec{b}$. But since there is only one vector of zero length, the definition still uniquely determines the cross product.)

Below is an applet that helps illustrate how the cross product works. Although it is admittedly hard to manipulate in a precise manner, you can convince yourself that the above properties of the cross product are satisfied by the cross product vector shown in the applet.



Cross product. The vector $\vec{c}$ (in red) is the cross product of the vectors $\vec{a}$ (in blue) and $\vec{b}$ (in green), $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. The parallelogram formed by $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is pink on the side where the cross product $\vec{c}$ points and purple on the opposite side. Using the mouse, you can drag the arrow tips of the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ to change these vectors. See how the cross product $\vec{c}$ and the parallelogram change in response. (You cannot change the red cross product vector $\vec{c}$ directly.) The three-dimensional perspective of this graph may be easier to perceive if you keep the figure rotating by dragging it with your mouse.

https://mathinsight.org/cross_product

Beispiele zur Motivation für folgende Rechnung

- Kamera-Koordinatensystem:
 - Gegeben: ein Viewpoint (virtuelle Kamera) und eine (Haupt-)Blickrichtung oder ein "Center of Interest"
 - Gesucht: ein Koordinatensystem mit $x = \text{"rechts"}$, $y = \text{"oben"}$, $z = \text{view dir.}$
- Billboards:
 - Gegeben: Dreieck (Mittelpunkt des Dreiecks), Viewpoint
 - Gesucht: Koordinatensystem mit Ursprung im Dreiecksmittelpunkt, z -Achse Richtung Viewpoint, und x, y senkrecht dazu (egal in welche Richtung)

Konstruktion eines Koordinatensystems

FYI:

Die Verallgemeinerung im n -dim. Vektorraum heißt Gram-Schmidt-Verfahren

- Häufige Aufgabe:
 - Ein Vektor $\mathbf{a}$ ist gegeben (z.B. Blickrichtung)
 - Erstelle dazu eine Orthonormalbasis
- Nicht eindeutig, aber oft genügt *irgendeine* Orthonormalbasis
- Algorithmus:
 1. Setze $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$
 2. Für $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ benötigen wir irgend einen Vektor $\mathbf{t}$, der nicht kollinear zu $\mathbf{w}$ ist; z.B. setze $\mathbf{t} := \mathbf{w}$, und ersetze die betragsmäßig kleinste Komponente durch 1
 3. Setze $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{t} \times \mathbf{w}|}$ $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$

Eigenschaften des Kreuzproduktes

- Einfache Eigenschaften:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = +\mathbf{z} \quad \mathbf{y} \times \mathbf{z} = +\mathbf{x} \quad \mathbf{z} \times \mathbf{x} = +\mathbf{y}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{antikommutativ / schiefsymmetrisch})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\text{distributiv})$$

$$\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\text{linear})$$

- Die **Jacobi-Identität**:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

- Es gilt **nicht** die Assoziativität!

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

- Es gilt **nicht** das Auslöschungsgesetz!

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \not\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

- Zusammenhang zwischen den Beträgen von Kreuz- und Skalarprodukt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

- Das Kreuzprodukt lässt sich auch als Matrix-Vektor-Produkt schreiben
- Definiere dazu die zum Vektor $\mathbf{a}$ duale (**schiefssymmetrische**) Matrix $\mathbf{a}^\times$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}^\times \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

- Die Darstellung mit schiefsymmetrischer Matrix hat viele Vorteile, u.a.:
 - $\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ aber $\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b}^\times \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}^\times) \cdot \mathbf{c}$
 - $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ aber $\mathbf{a}^\times (\mathbf{b}^\times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^\times \mathbf{b}^\times) \mathbf{c}$
- Fazit: bei der Schreibweise mit schief-symmetrischer Matrix $\mathbf{a}^\times$ gilt die Assoziativität!

- Warum ist $\mathbf{a}^\times (\mathbf{b}^\times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^\times \mathbf{b}^\times) \mathbf{c}$,
aber trotzdem $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$?
- Weil $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ äquivalent zum Ausdruck $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\times \mathbf{c}$ ist,
aber die Matrix $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\times$ verschieden ist von der Matrix $\mathbf{a}^\times \mathbf{b}^\times$
- Hintergrund:
 - Beim Ausdruck $\mathbf{a}^\times \mathbf{c}$ wird die Matrix $\mathbf{a}^\times$ als konstant betrachtet und ist eine lineare Abbildung, ein Operator, der auf den (variablen) Vektor $\mathbf{c}$ wirkt
 - Dasselbe gilt für den Ausdruck $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$: wenn $\mathbf{a}$ konstant ist, ist das ein linearer Ausdruck in den Koordinaten von $\mathbf{c}$
 - Lineare Abbildungen, die hintereinander ausgeführt werden, ergeben wieder eine lineare Abbildung

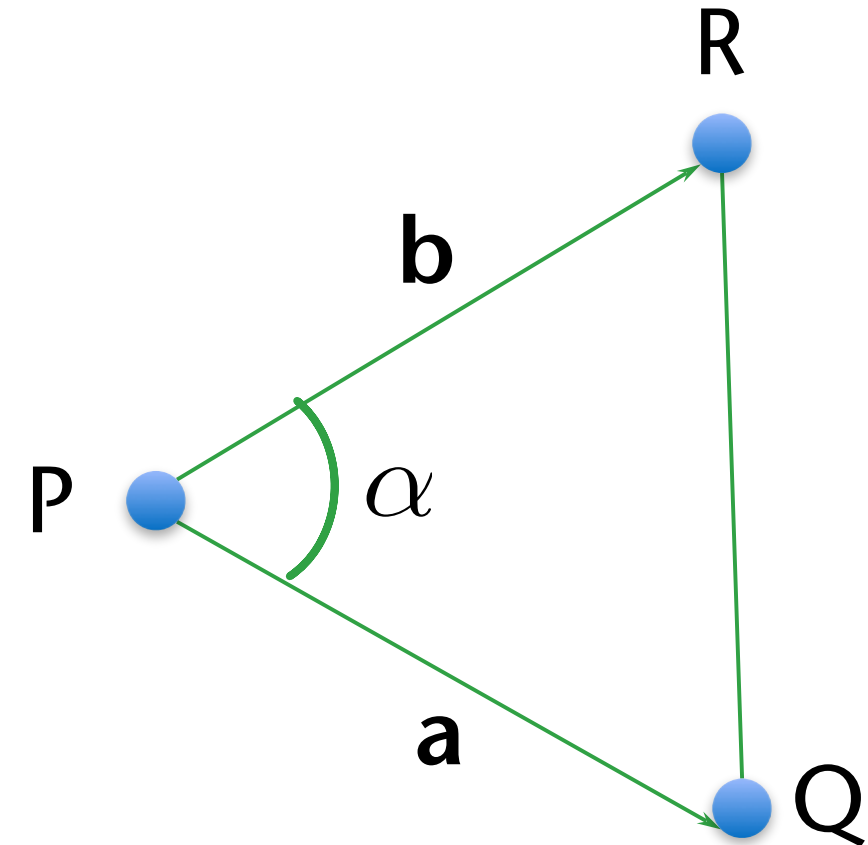
- Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt und Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

- Heißt auch *"triple product expansion"*, *"triple cross product identity"* oder **Graßmann-Identität** oder **Graßmannscher Entwicklungssatz**
 - Eselsbrücke: "ABC = BAC- CAB" ("erst backen, dann kappen")
 - Oder: alle zyklischen Permutationen von A,B,C

- Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$\begin{aligned} A(\triangle PQR) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \end{aligned}$$



- Erweiterung: Flächeninhalt mit Vorzeichen

$$A(\triangle PQR) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| & , P, Q, R \text{ gegen Uhrzeigersinn} \\ -\frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| & , P, Q, R \text{ im Uhrzeigersinn} \end{cases}$$

- Achtung: ist eine **reine Konvention** / Definition – sie ist in keiner Weise der Geometrie inhärent! (aber eine sehr praktische Konvention, macht aber so nur in **2D** Sinn!)

- Satz ("SPQR-Satz"): Sei PQR ein Dreieck und S ein **beliebiger** Punkt in derselben Ebene. Dann gilt:

$$A(\triangle PQR) = A(\triangle SPQ) + A(\triangle SQR) + A(\triangle SRP)$$

- Bezeichnung: $\square PQRS$ = Viereck (*quadrangle, quadrilateral*)

Beweis

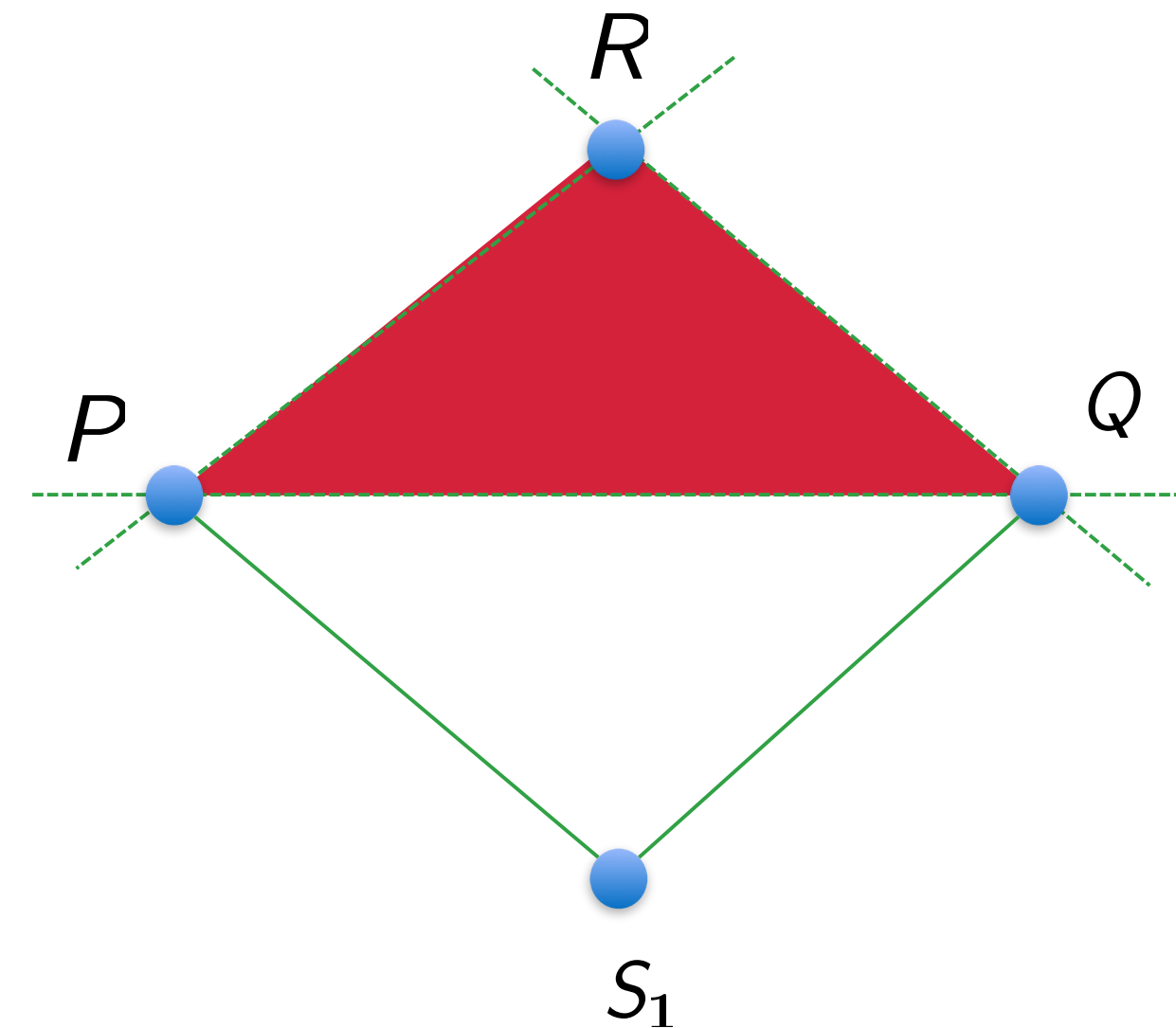
1. Fall: S liegt im Inneren des Dreiecks
→ Behauptung ist klar

2. Fall: S liege außerhalb des Dreiecks

- Annahme: $S = S_1$
- Klar ist:

$$A(\triangle PQR) = A(\square PSQR) - A(\triangle SQP)$$

⇒ Behauptung



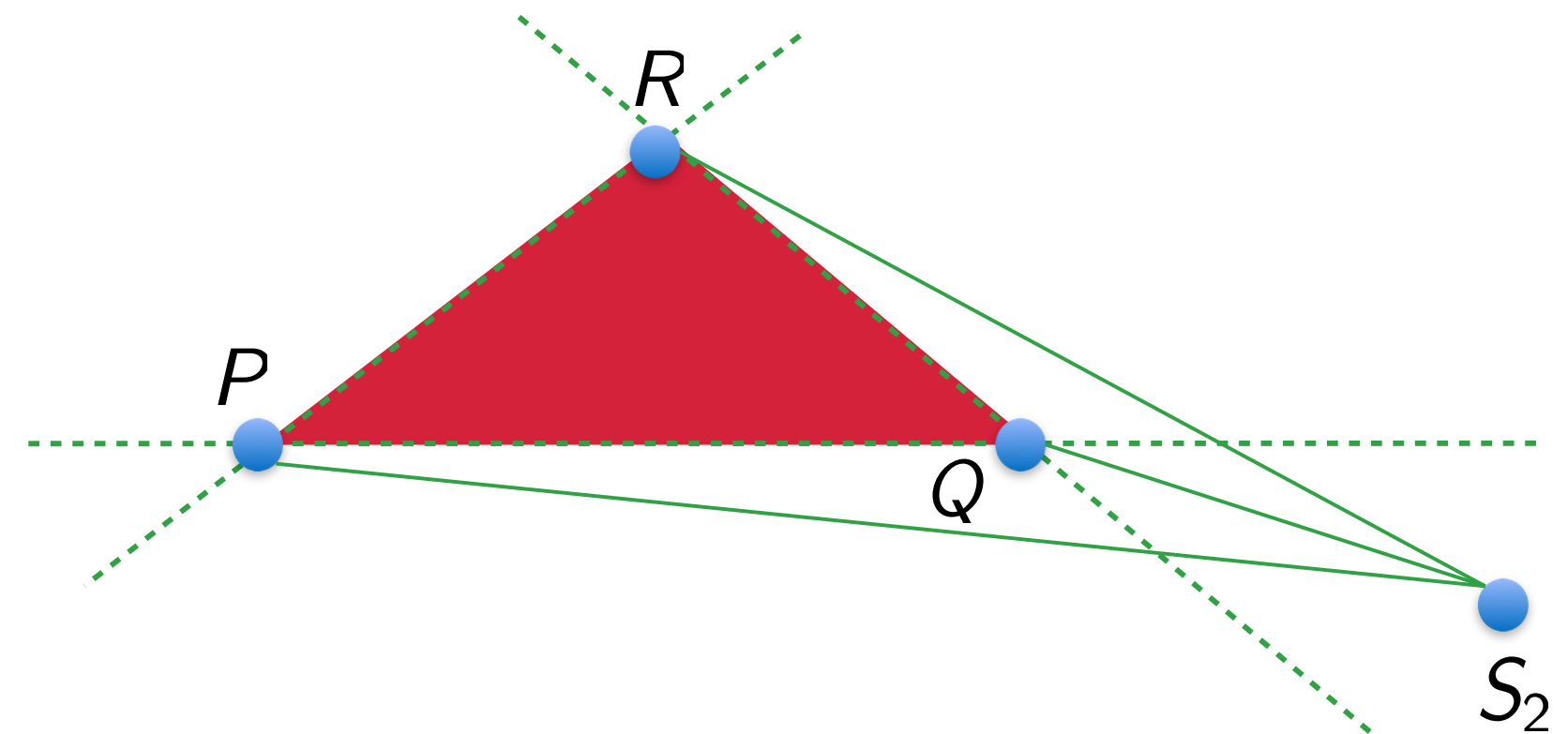
3. Fall: $S = S_2$

- Dann ist $A(\triangle PQR) = A(\triangle SRP) - A(\triangle SQP) - A(\triangle SRQ)$

und $A(\triangle SPQ) < 0$

und $A(\triangle SQR) < 0$

$\Rightarrow$ Behauptung



- Falls S in einer der anderen Regionen liegt, folgt die selbe Behauptung durch Umbenennen der Ecken des Dreiecks

Flächeninhalt als Determinante

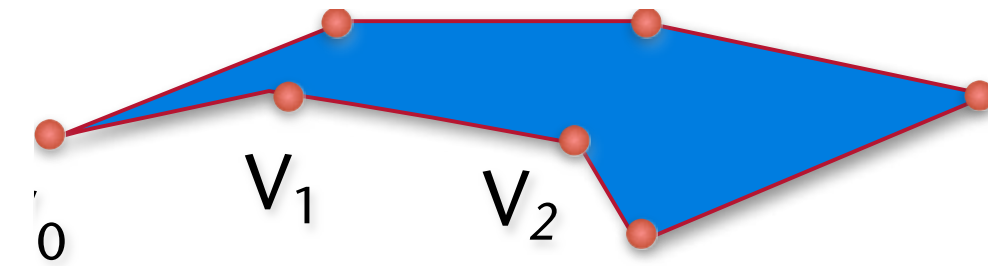
- Eine alternative Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks:

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} P_x & P_y & 1 \\ Q_x & Q_y & 1 \\ R_x & R_y & 1 \end{pmatrix}, \quad P, Q, R \in \mathbb{R}^2$$

- Beweisskizze:
 - P, Q, R in $\mathbb{R}^3$ einbetten mit jew. $z = 0$
 - Determinante vergleichen mit der z-Komponente von $(Q - P) \times (R - P)$

Polygone

- Definition: ein **Polygon** ist ein geometrischer Graph $P=(V, E)$, mit Knoten $V=\{V_0, V_1, \dots, V_{n-1}\} \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, und Kanten $E=\{ (V_0, V_1), \dots, (V_{n-1}, V_0) \}$, so dass alle Knoten in *einer* Ebene liegen.
- Die Knoten werden (engl.) **vertices** (sg. **vertex**) genannt



- Fast immer verlangen wir (nehmen wir an), dass das Polygon **einfach** ist = der Schnitt zweier Kanten aus E ist entweder leer oder genau einer der Vertices aus V , und dass jeder Vertex zu genau zwei Kanten inzident ist (d.h., keine Selbstschnitte, keine "losen Kanten")

Fläche eines Polygons

- Definition (Ohr):

Sei $V^1, \dots, V^n$ ein überschneidungsfreies Polygon in einer Ebene.

Eine Ecke V^i heißt "**Ohr**" gdw. die Strecke $V^{i-1}V^{i+1}$ komplett im Inneren des Polygons liegt.

- Satz (ohne Beweis):

Jedes überschneidungsfreie Polygon in einer Ebene hat **mindestens 2 Ohren**.

- Satz (Fläche eines Polygons):

Für jedes geschlossene, überschneidungsfreie Polygon $V^1, \dots, V^n$ und einen beliebigen Punkt P in der Ebene gilt:

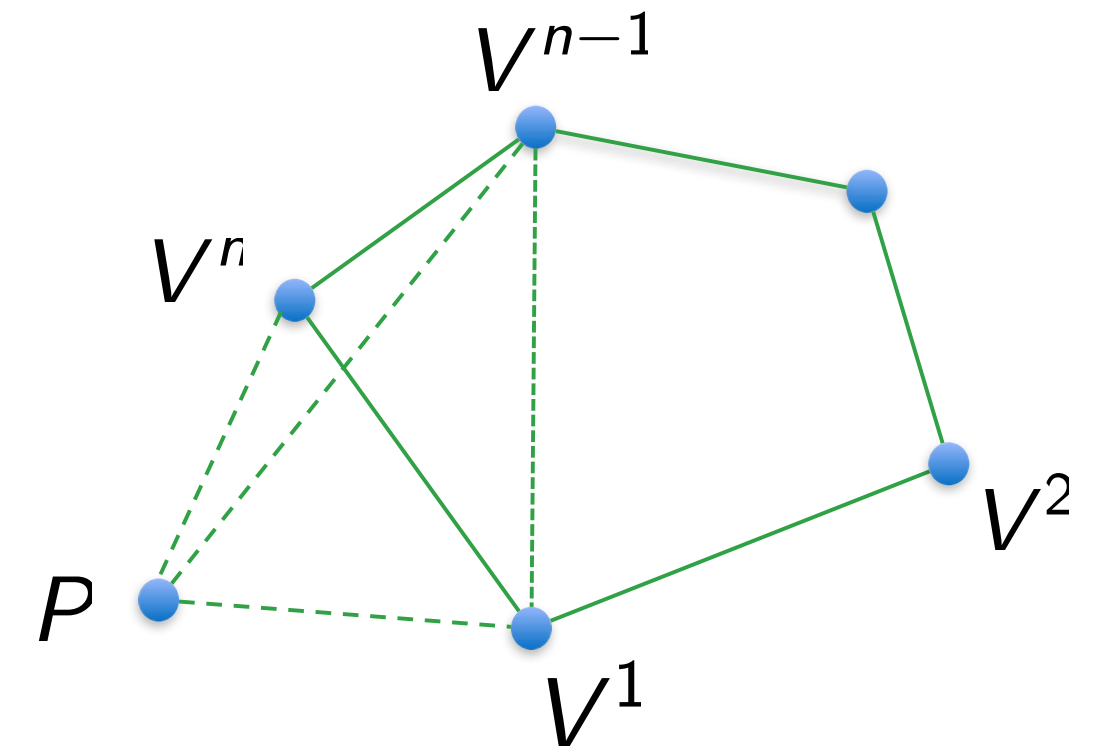
$$A(\text{Polygon}) = \sum_{i=1}^n A(\triangle P V^i V^{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_x^i V_y^{i+1} - V_y^i V_x^{i+1}$$

- Beweis: Teil 1

- Induktionsanfang: $n = 3$

Aus SPQR-Satz $\Rightarrow A = A(PV^1V^2) + A(PV^2V^3) + A(PV^3V^1)$

- Induktionsschritt: $n > 3$
o.B.d.A. ist $V^n = \text{Ohr}$
(sonst die V^i umnummerieren)
Nun gilt:



$$A = \sum_{i=1}^{n-2} A(PV^iV^{i+1}) + A(PV^{n-1}V^1) + A(V^1V^{n-1}V^n)$$

Induktionsvoraussetzung

II

$$A(PV^1V^{n-1}) + A(PV^{n-1}V^n) + A(PV^nV^1)$$

⇒ Behauptung

Übung ?!

- Beweis Teil 2: betrachte alle Punkte als 3D-Punkte in der xy-Ebene

$$A(PV^iV^{i+1}) = \text{z-Komponente von } \frac{1}{2} (V^i - P) \times (V^{i+1} - P)$$

Wähle $P = 0 \Rightarrow$

$$A(PV^iV^{i+1}) = \text{z-Komponente von } \frac{1}{2} V^i \times V^{i+1}$$

$\Rightarrow$ Behauptung

Geometrische Prädikate ("Tests")

- Ein **geometrisches Prädikat** ist eine Formel / ein Algorithmus, die erfüllt ist / der "wahr" liefert, wenn eine bestimmte geometrische Bedingung erfüllt ist.

- Beispiel: sind zwei Kanten $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ parallel?

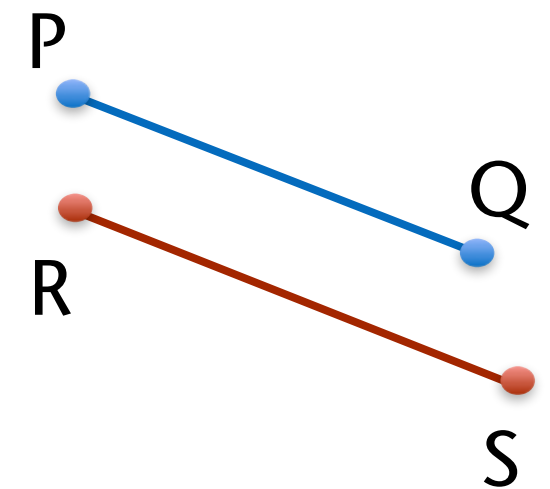
- Lösungen:

- $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow (Q - P) \times (S - R) = 0$

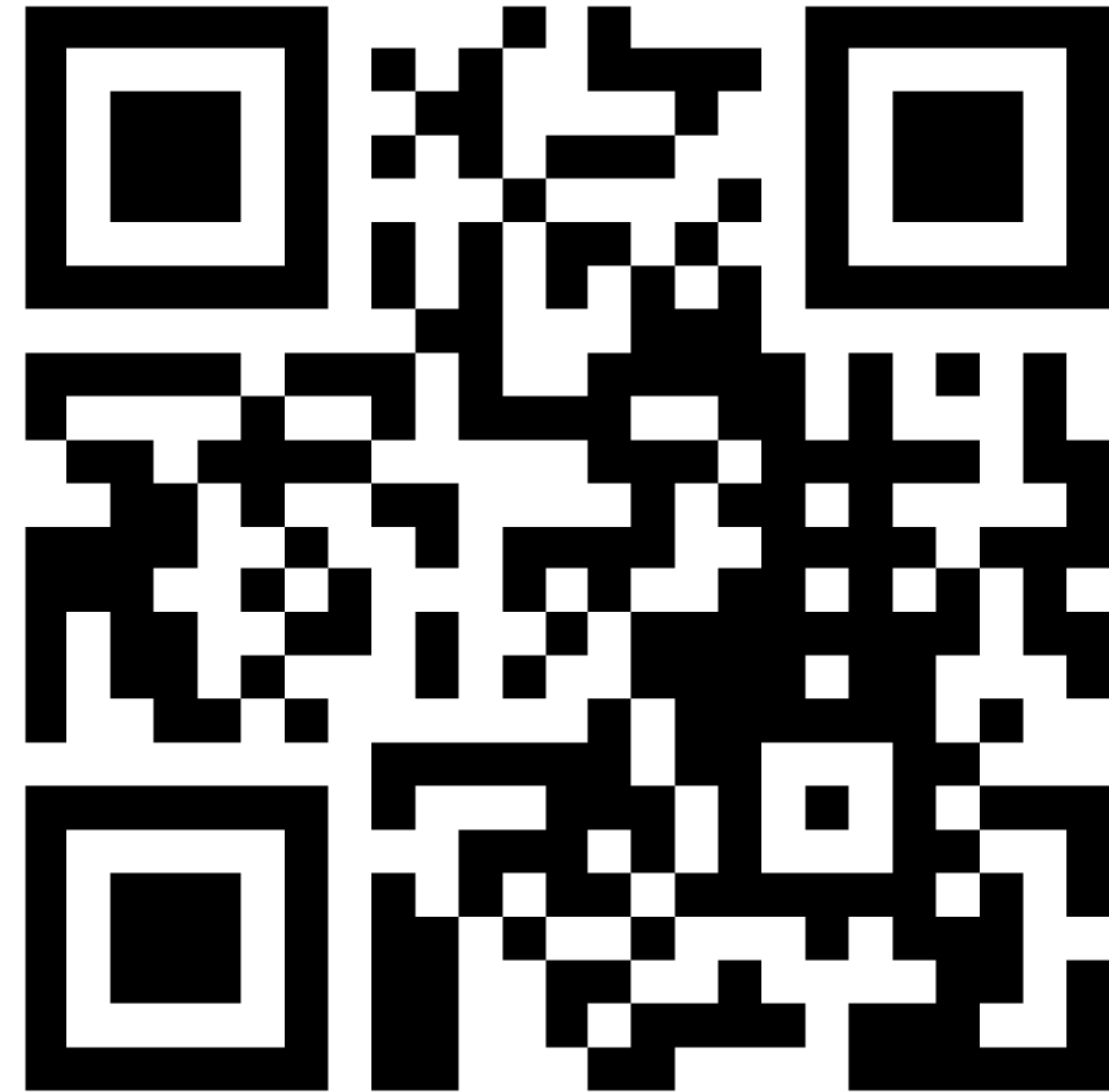
- $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow \frac{(Q - P)}{\|(Q - P)\|} \cdot \frac{(S - R)}{\|(S - R)\|} = 1$

- Weitere?

- Beachte die numerische Robustheit!



Fragen zur numerischen Robustheit



<https://www.menti.com/3pb6m4eooz>

Beispiel: schneiden sich zwei koplanare Kanten?

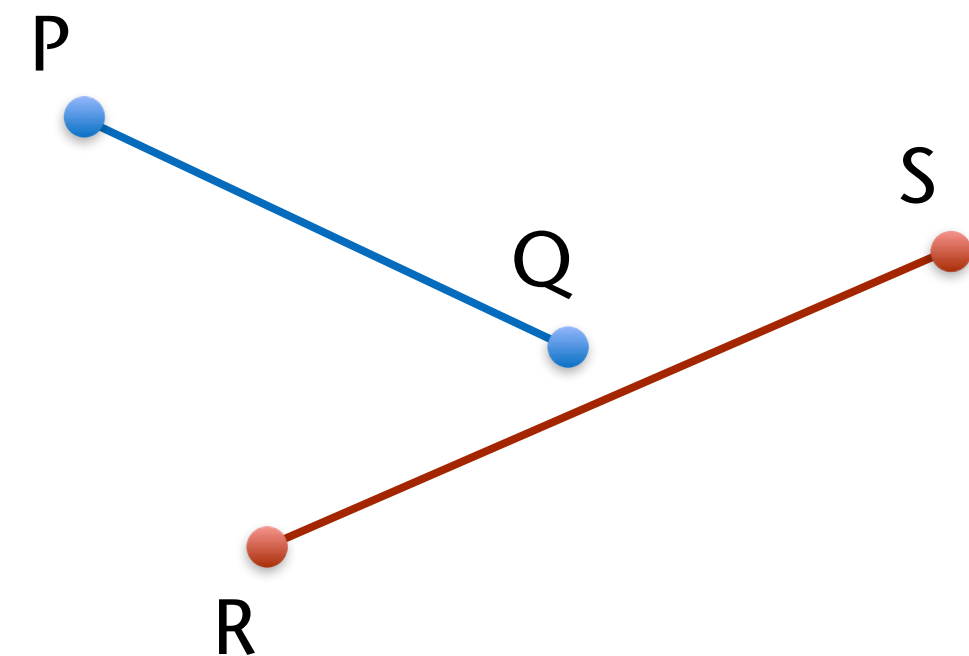
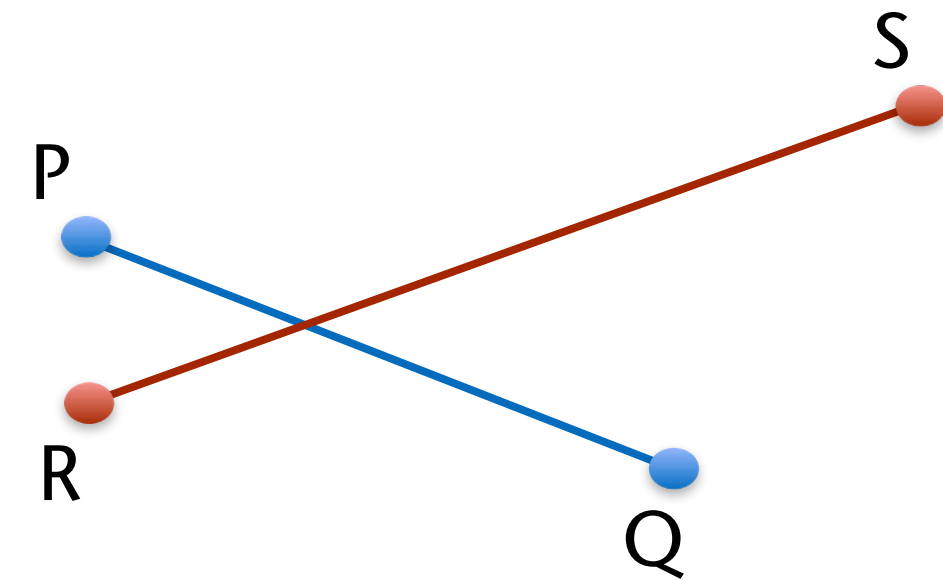
- Das Prädikat: " $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ schneiden sich "
- kann man mathematisch so fassen:

$$(\overline{PR} \times \overline{PQ}) \cdot (\overline{PQ} \times \overline{PS}) > 0$$

und

$$(\overline{RQ} \times \overline{RS}) \cdot (\overline{RS} \times \overline{RP}) > 0$$

- Achtung: funktioniert nur, wenn diese Voraussetzung erfüllt ist:
 - Alle 4 Punkte befinden sich in ein- und derselben Ebene



- Definition **Konvexität**:

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ist **konvex** $\Leftrightarrow$

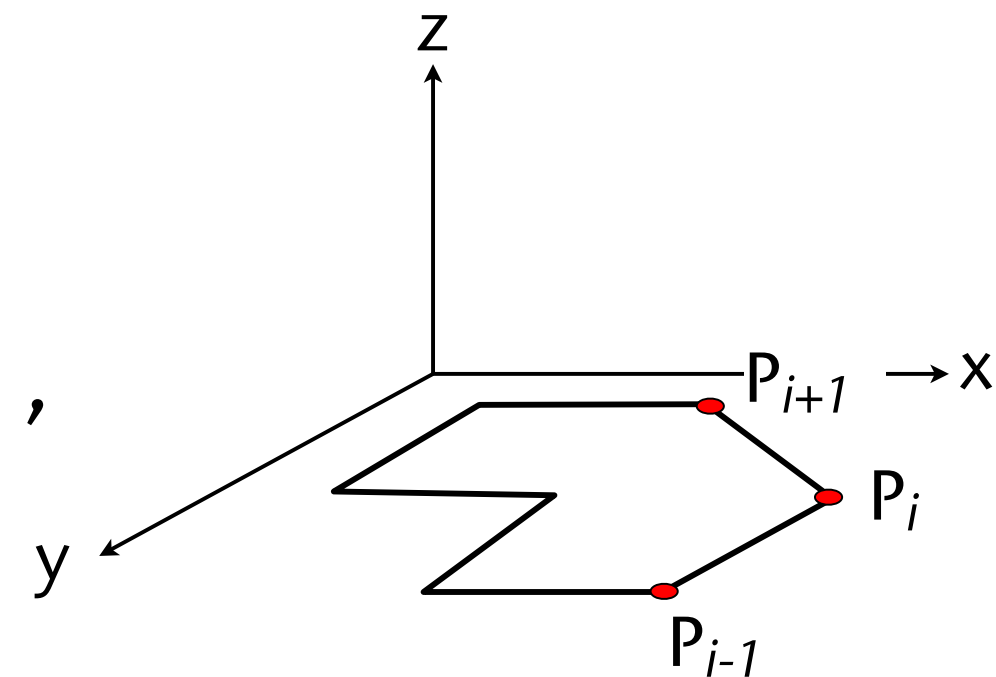
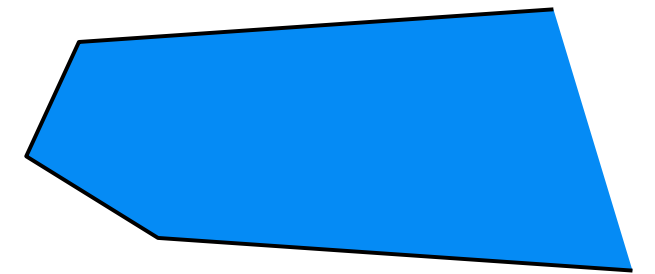
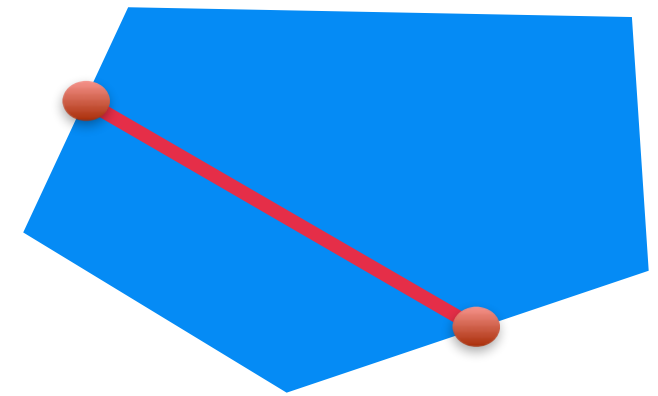
für alle $P_1, P_2 \in G$ die gesamte Linie $\overline{P_1 P_2} \subseteq G$ ist.

- Bemerkung:

- Das Gebiet muß nicht beschränkt sein
- Die Aussage "ein Polygon ist konvex" meint eigtl., daß das von dem Polygon umschlossene Gebiet (inkl. Rand) konvex ist

- Aufgabe: stelle für ein gegebenes Polygon fest, ob es konvex ist

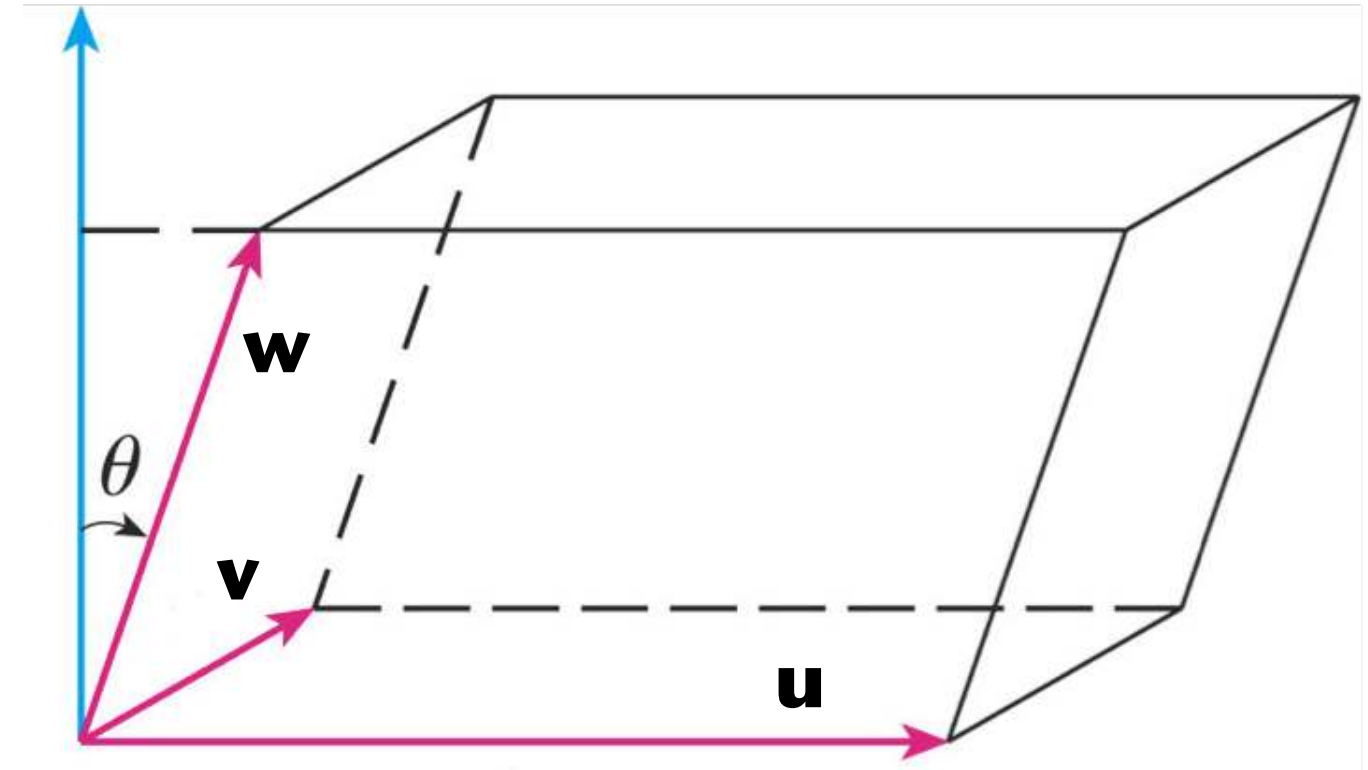
- Lösung: berechne an jeder Ecke $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1}$, $\mathbf{v}_i = P_i - P_{i-1}$, und teste das Vorzeichen der z-Komponente
- Voraussetzung: Polygon muss überschneidungsfrei sein



Das Spatprodukt

- Definition:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



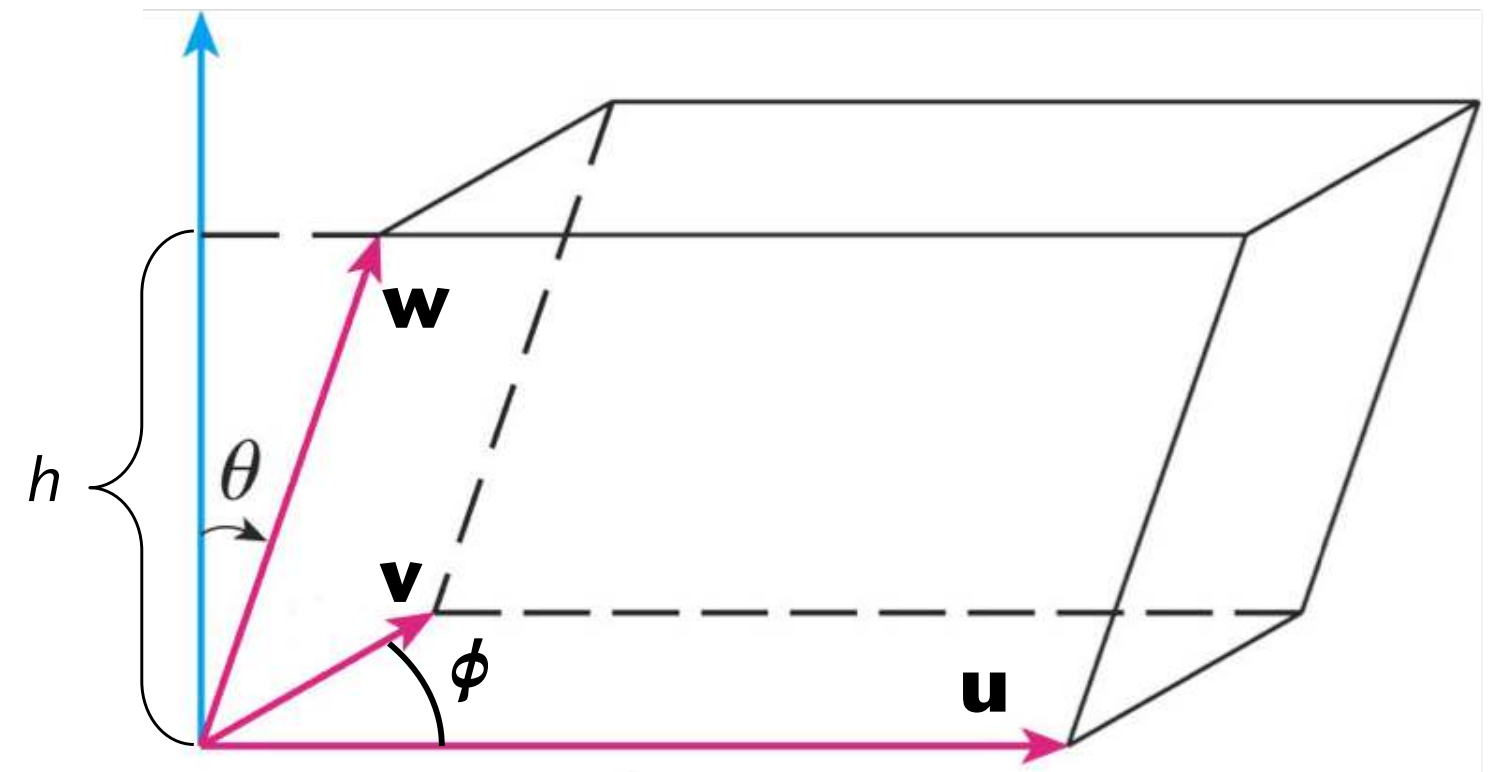
- Englische Begriffe:
scalar triple product, triple product, mixed product,

- Geometrische Interpretation:

$$\text{Vol}(\text{Spat}) = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$$

- Beweis:

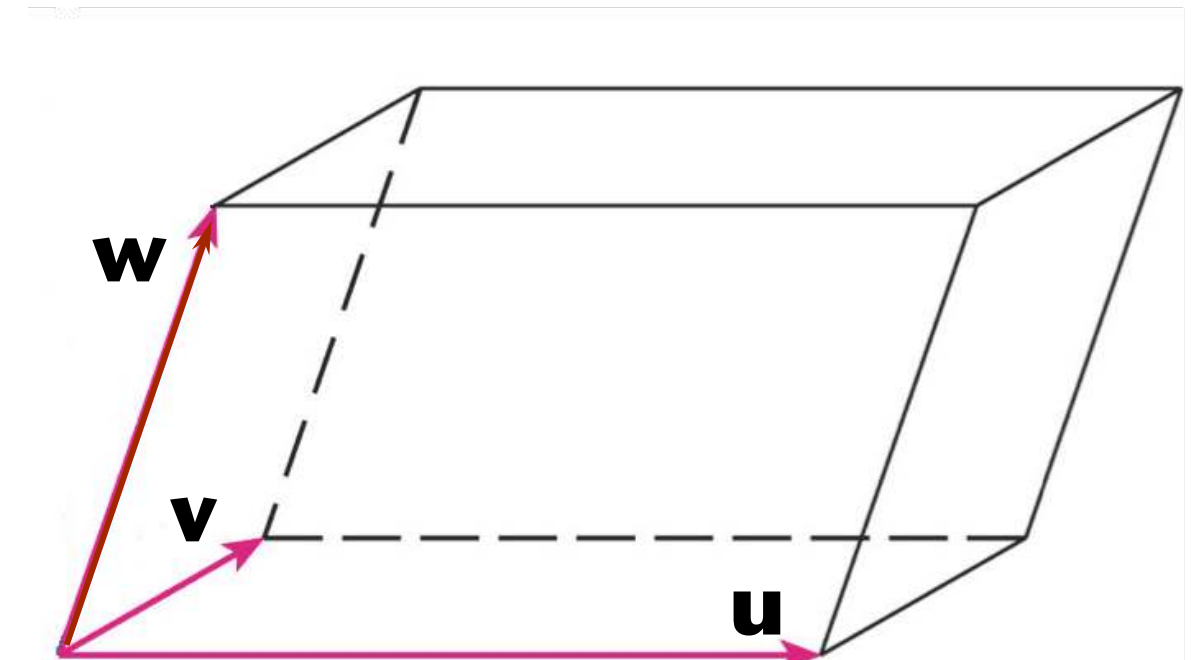
$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Spat}) &= \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \\ &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \phi \|\mathbf{w}\| \cos \Theta \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \Theta \\ &= \|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}\| \end{aligned}$$



- Erweiterung des Volumens um ein **Vorzeichen**:

$$\text{Vol}(\text{Spat}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

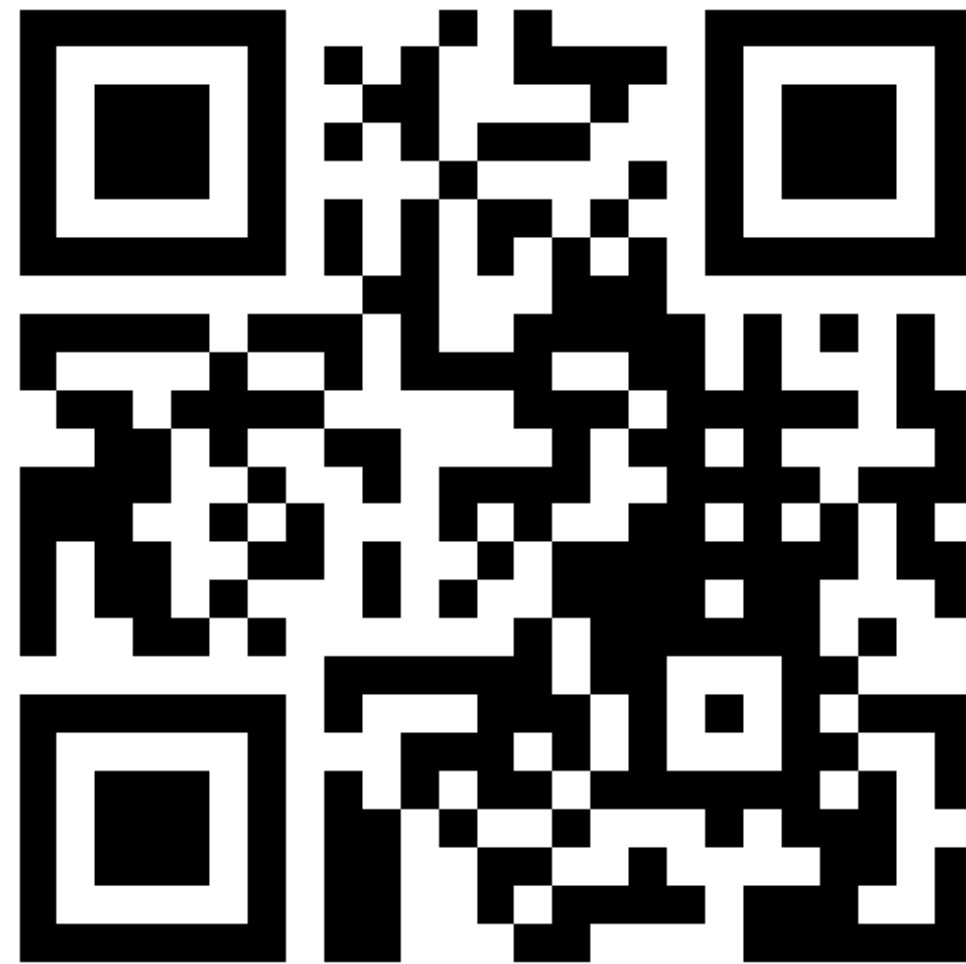
- $\text{Vol}(\text{Spat}) > 0 \Leftrightarrow$
 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bilden ein Rechtssystem $\Leftrightarrow$
 Winkel zwischen $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ und $\mathbf{w} < 90^\circ$



- Bemerkung: $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix}$

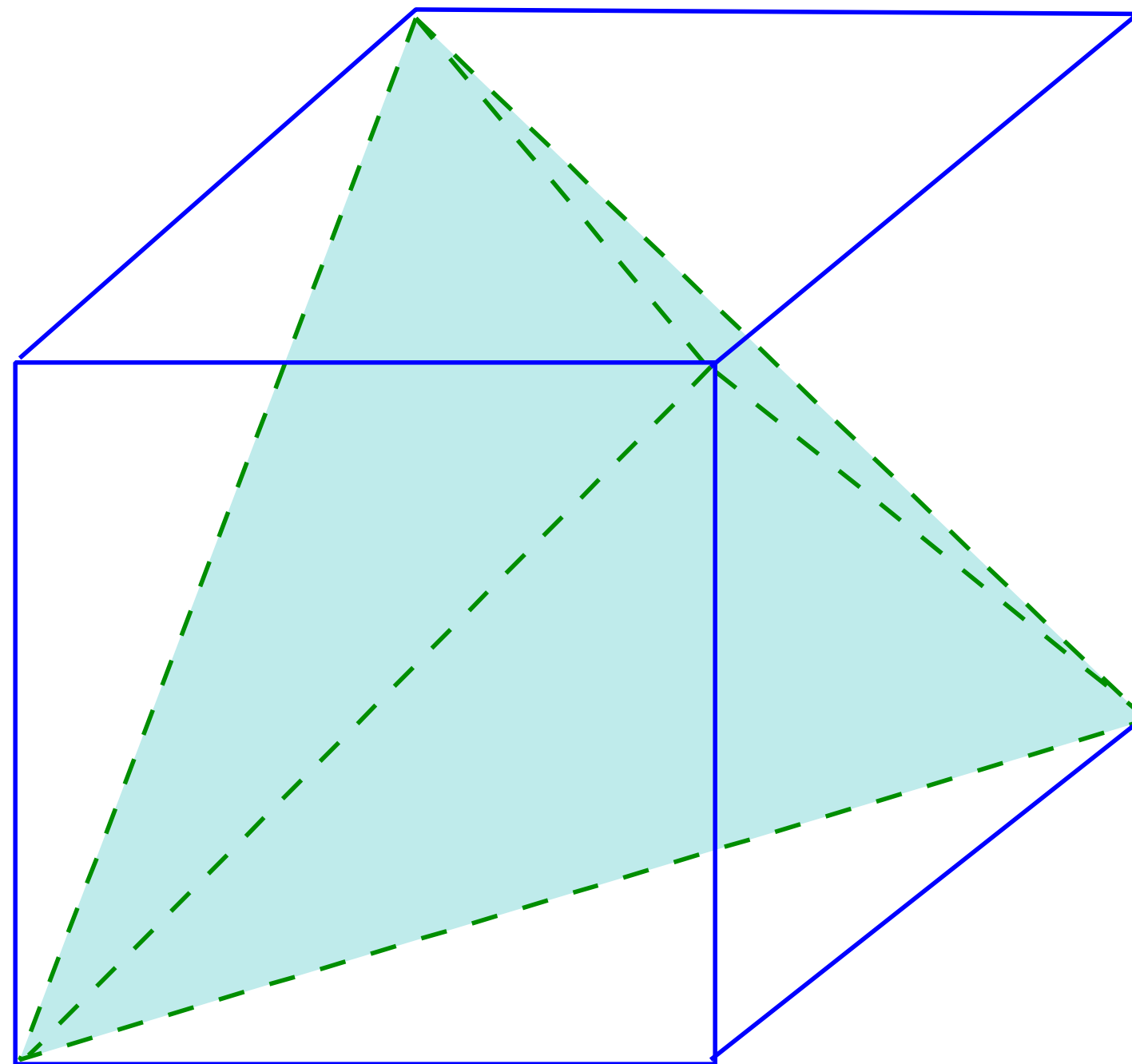
Denksportaufgabe

- Wenn man einen Würfel in Tetraeder partitioniert, wieviele Tetraeder erhält man dann? (Partitionieren = keine zusätzlichen Ecken generieren!)

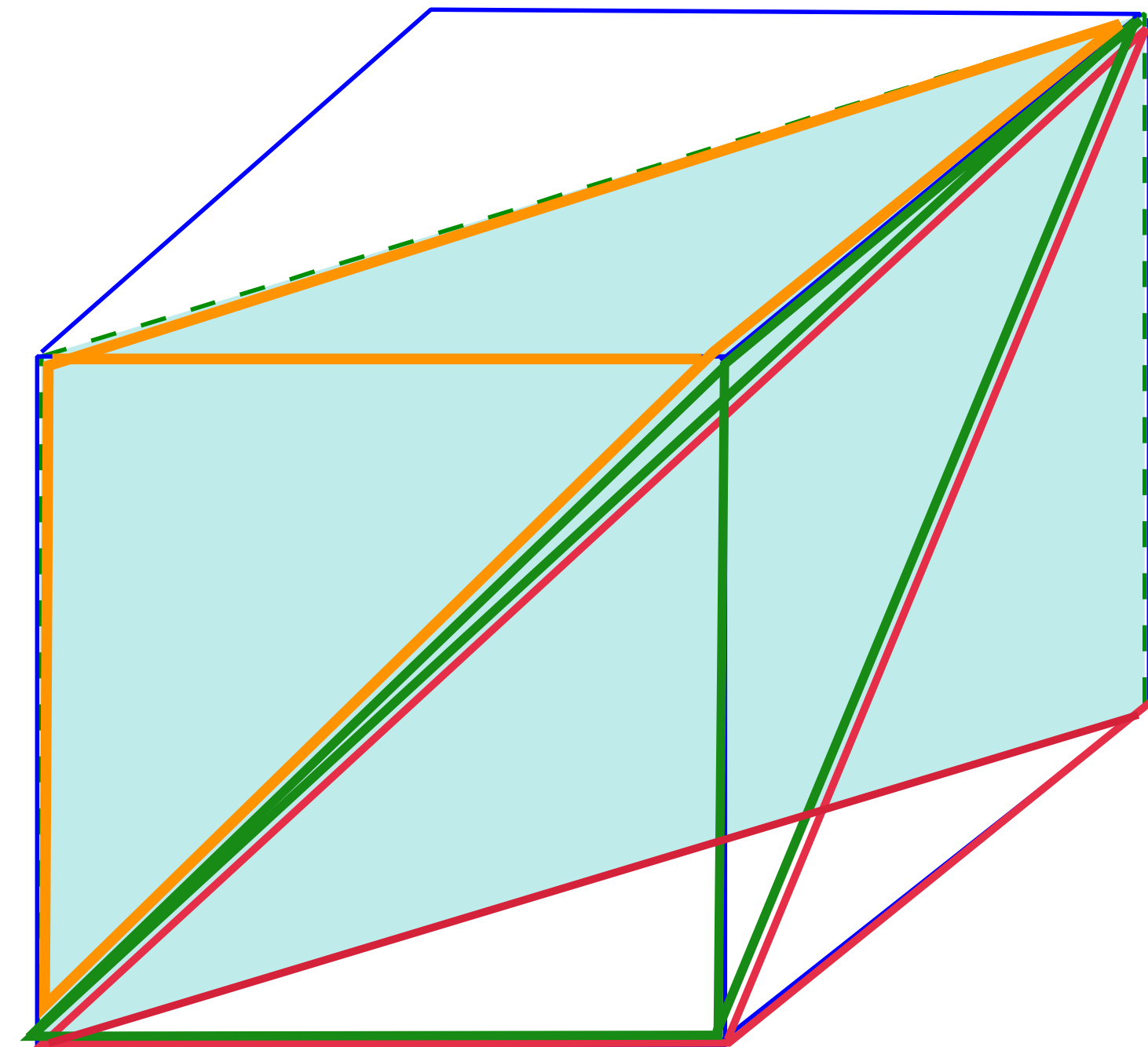


<https://www.menti.com/3pb6m4eooz>

5 Tetraeder



6 Tetraeder



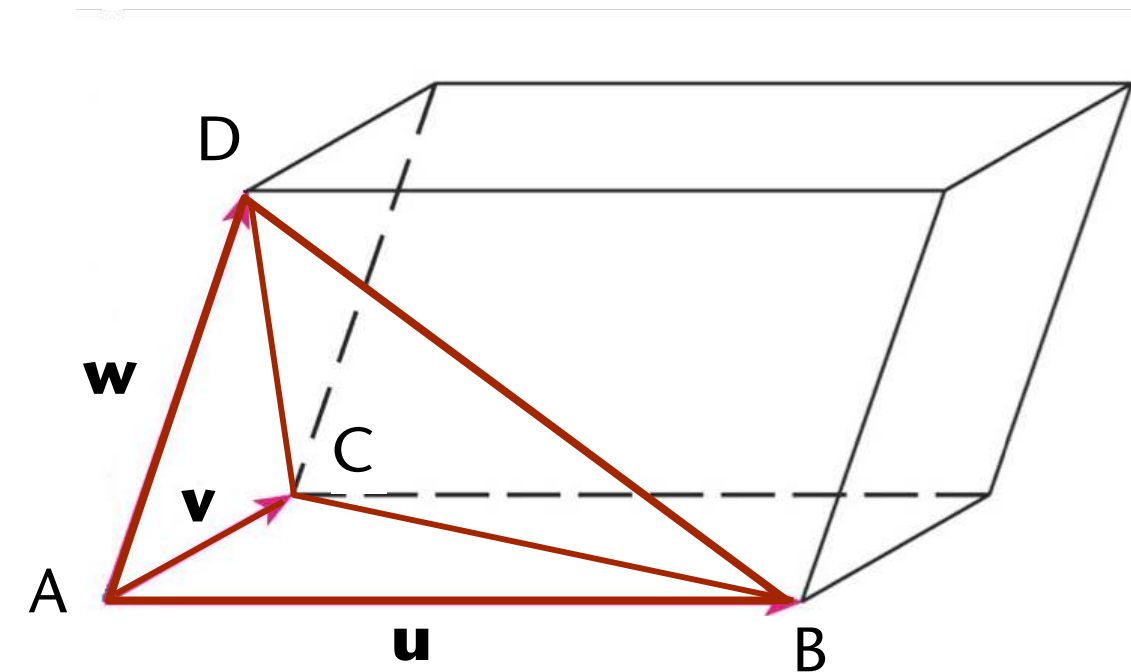
Das Volumen eines Tetraeders

- Es gilt:

$$\text{Vol}(ABCD) = \frac{1}{6}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

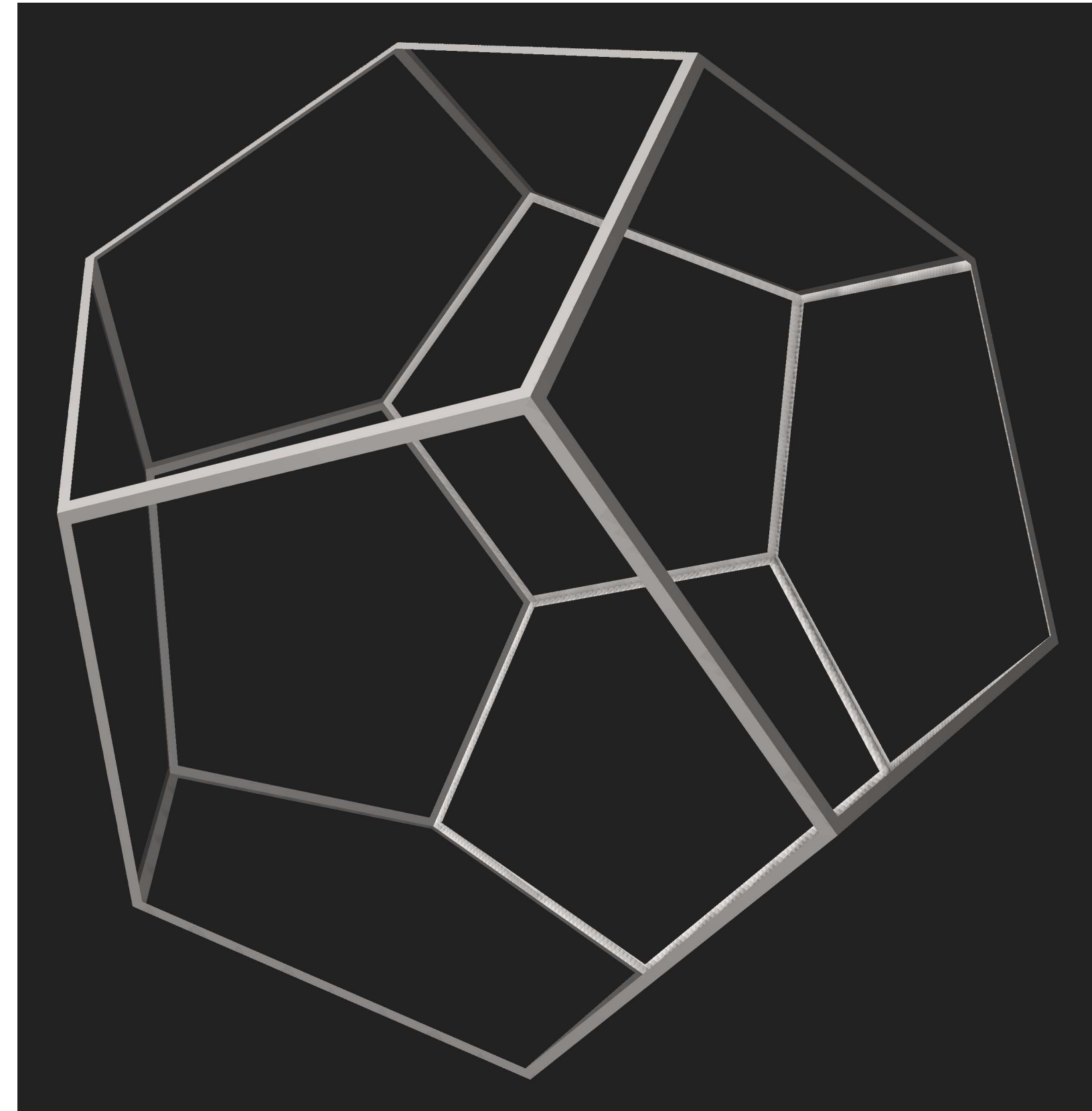
$$= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \\ C_x & C_y & C_z & 1 \\ D_x & D_y & D_z & 1 \end{pmatrix}$$



- Bemerkung: so bekommen die Punkte A, B, C, D einen "Umlaufsinn"!
- Achtung: ein Dreieck im 3D hat keinen Umlaufsinn per se!

Anwendung: das Volumen beliebiger Objekte



Koplanarität & Umlaufsinn im 3D

- Definition **Umlaufsinn im 3D**:

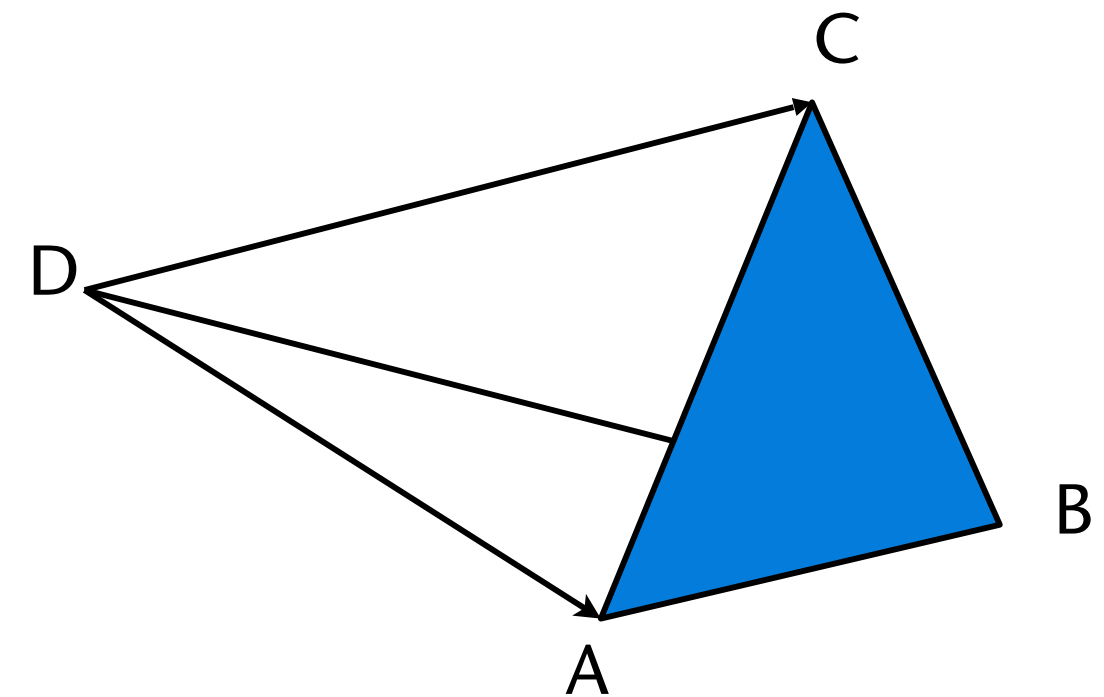
Drei Punkte A, B, C erscheinen von einem vierten Punkt D aus entgegen dem Uhrzeigersinn $\Leftrightarrow$

$$(A - D) \times (B - D) \cdot (C - D) < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Vol}(DACB) < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Vol}(ABCD) < 0$$

Your task: check the signs!

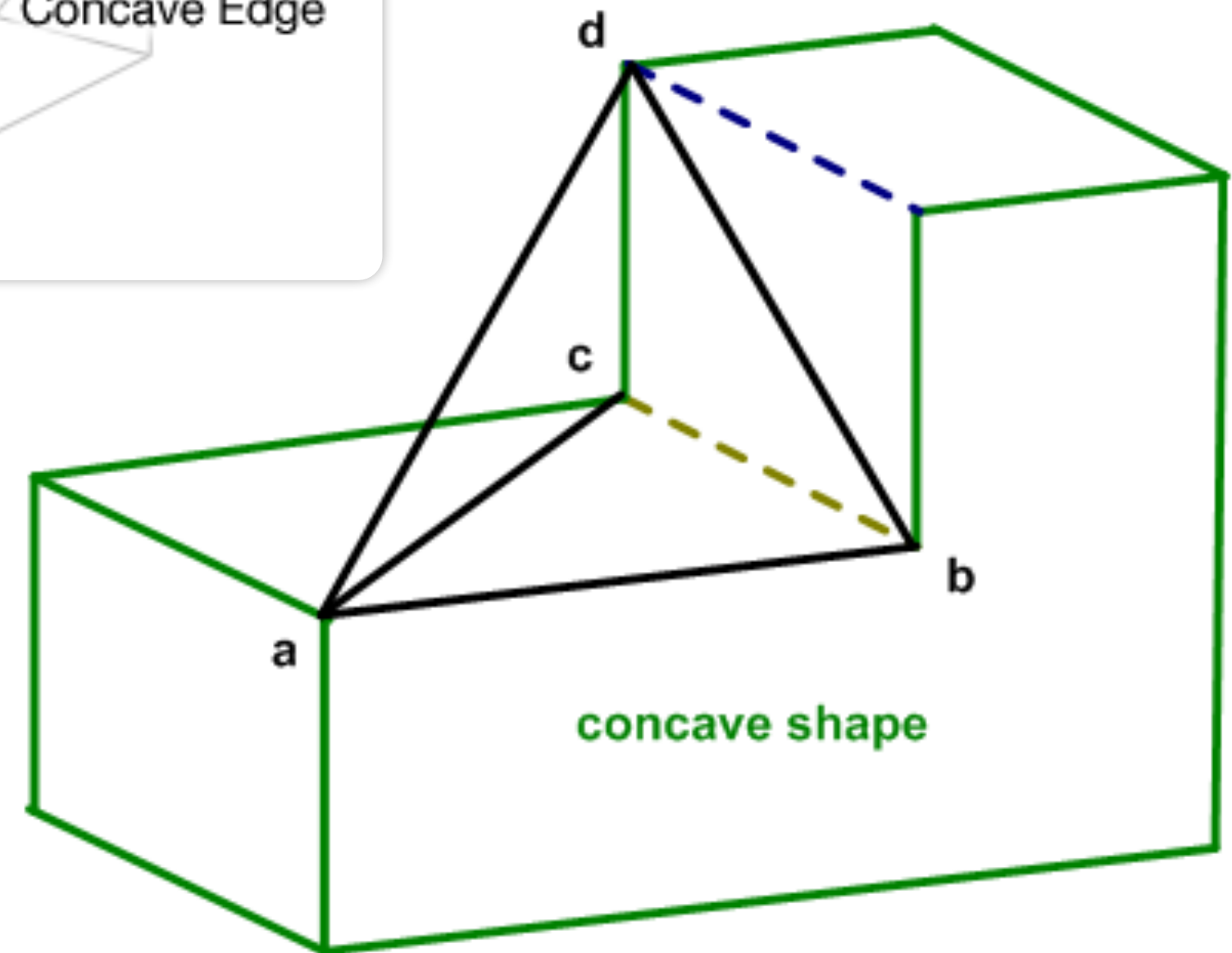
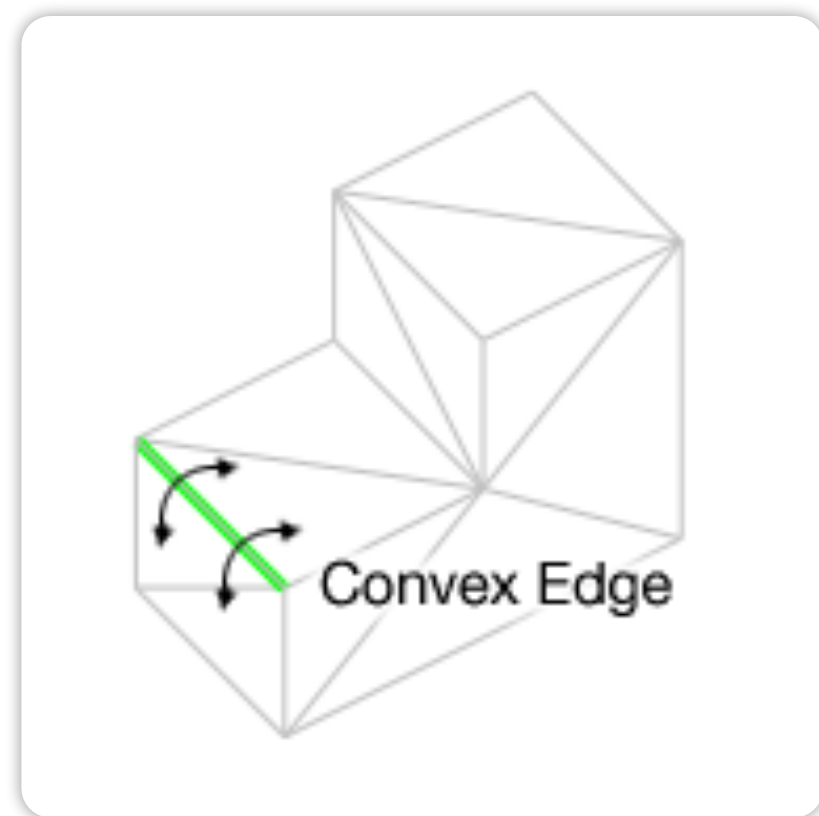
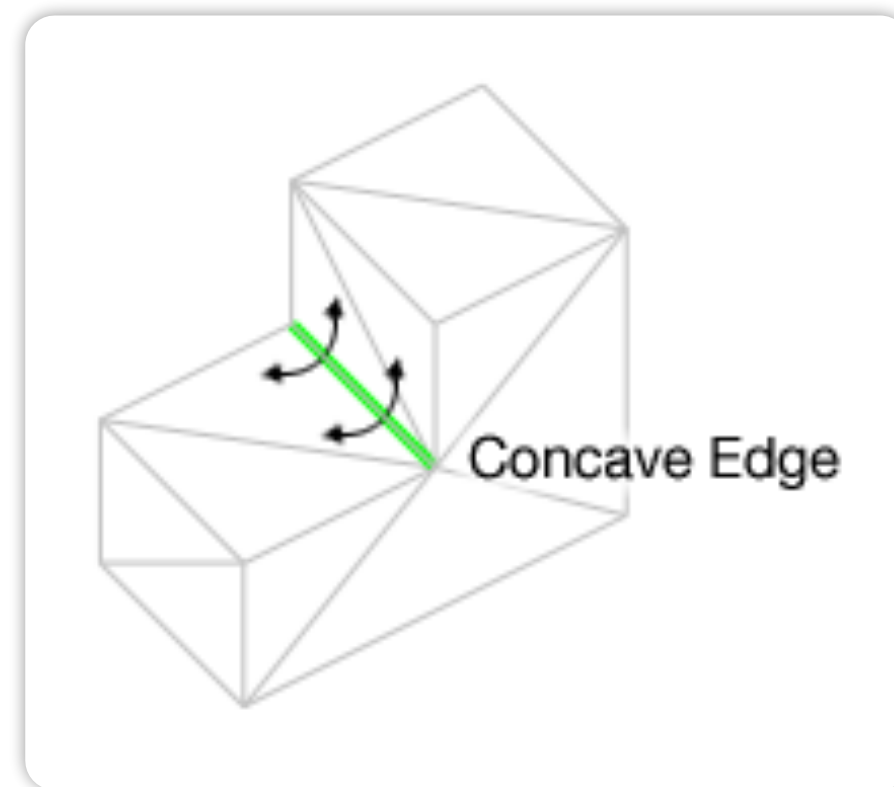


- Koplanarität:

Drei Vektoren **a**, **b**, **c** sind koplanar $\Leftrightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$

Konvexität in 3D

- Test auf Konvexität oder Konkavität einer Kante eines Polyeders:



Geometrisches Prädikat: Punkt P im Inneren eines Tetraeders

- Wann liegt ein Punkt P im Inneren eines Tetraeders?

- Genau dann, wenn die Vorzeichen von

$$\text{Vol}(ABCD)$$

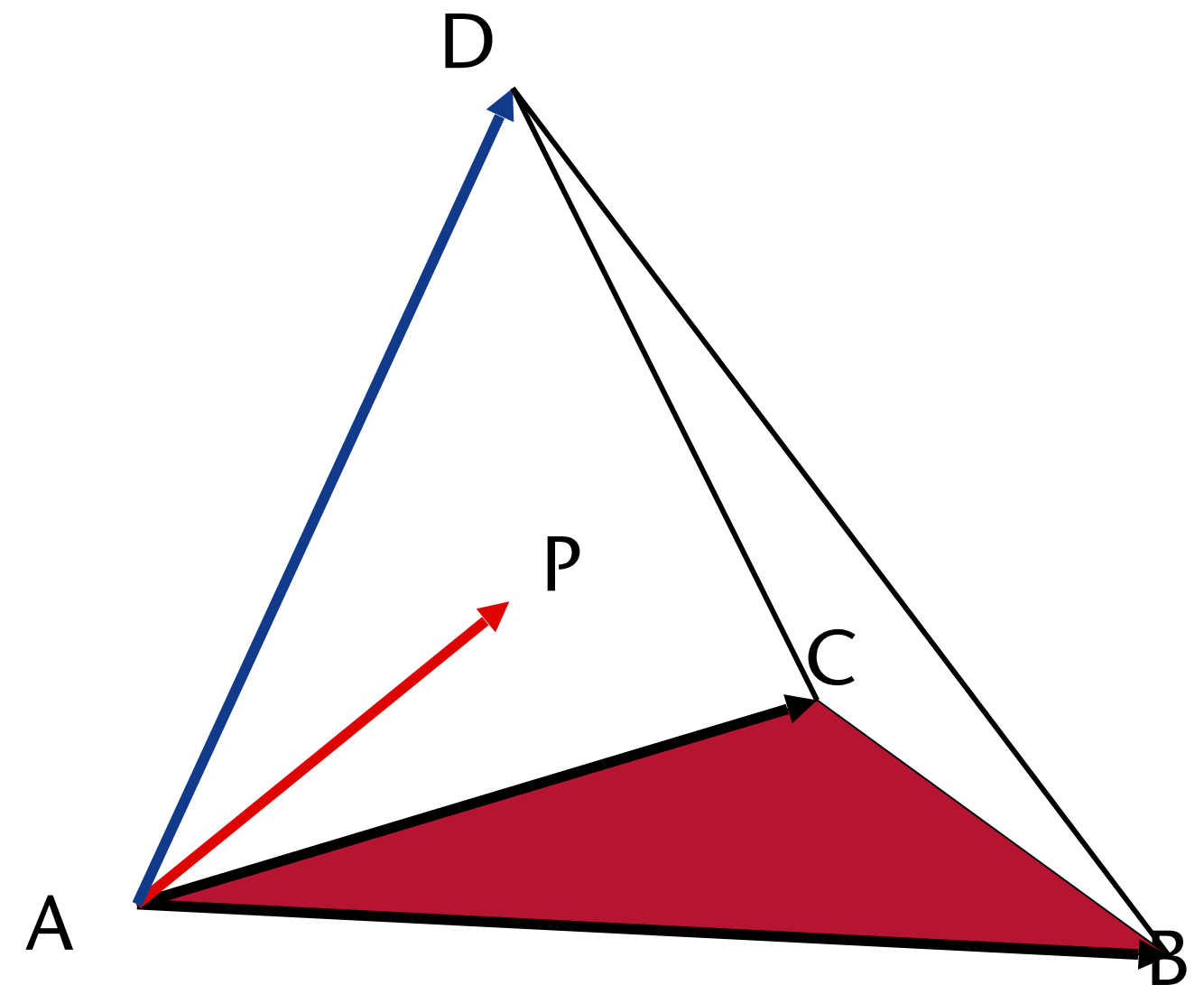
$$\text{Vol}(PBCD)$$

$$\text{Vol}(APCD)$$

$$\text{Vol}(ABPD)$$

$$\text{Vol}(ABCP)$$

alle gleich sind!

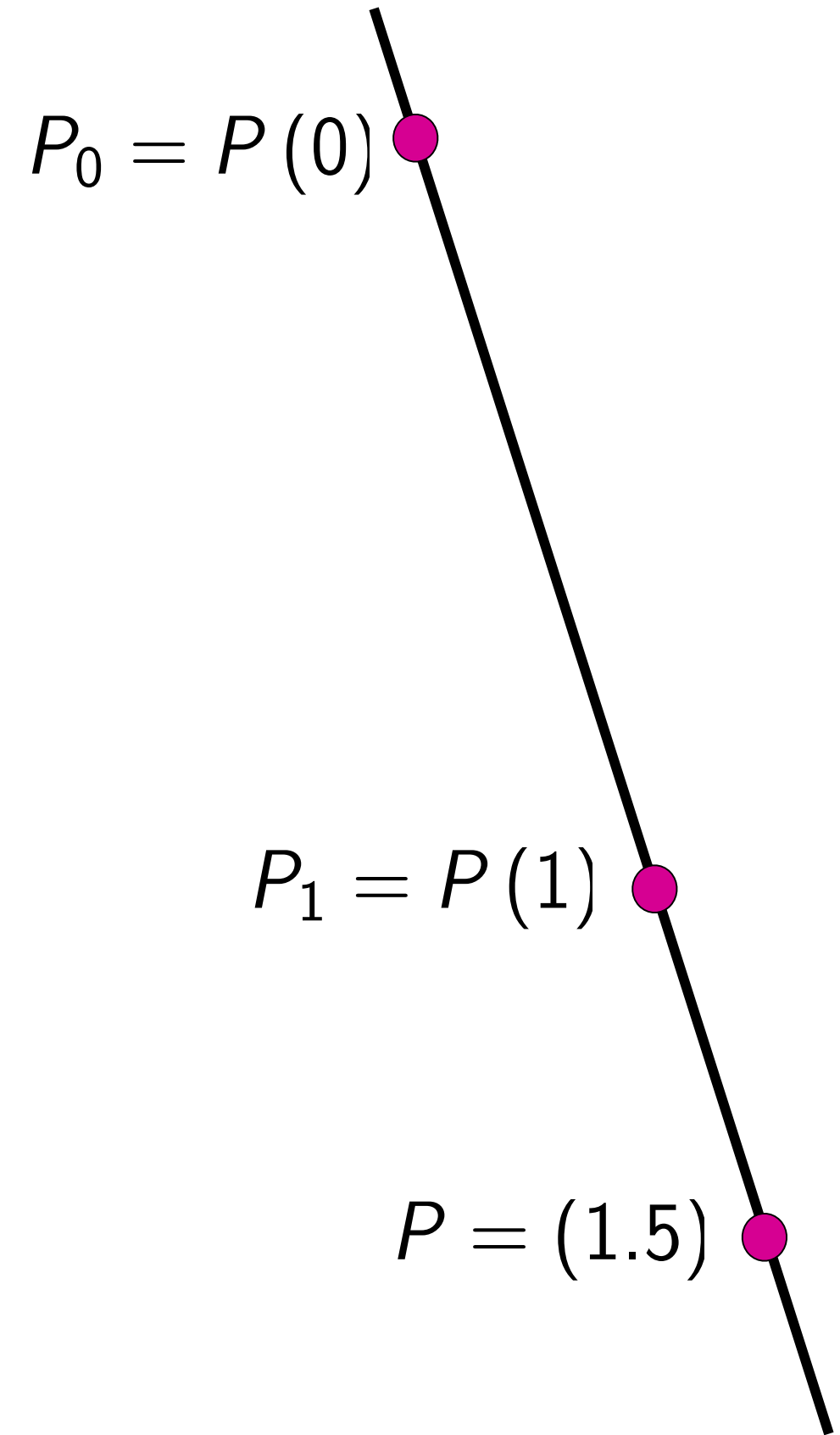


Parametrische Geraden (*parametric line*)

- Definition einer Geraden, die durch zwei Punkte geht:

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

- Interpretation:
zu $P(t)$ kommt man, indem man bei P_0 startet, und um t "Einheiten" auf der Geraden in Richtung P_1 geht



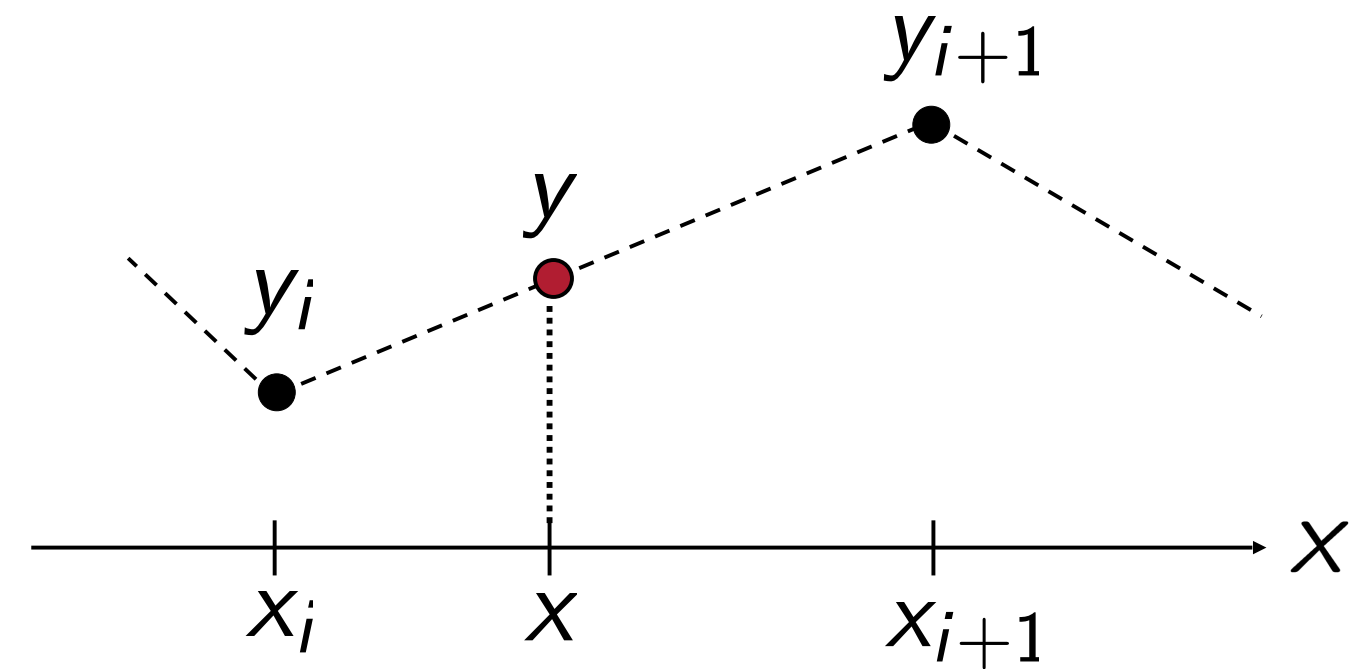
Lineare Interpolation

- Häufige Aufgabe in CG
 - Punkte, Farben, Höhen, etc., interpolieren
- Die Gerade $P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1 - t)P_0 + tP_1$
ist eine **lineare Interpolation** (im n -dim. Raum, $P_i \in \mathbb{R}^n$)
- Erweiterung : **stückweise lineare Interpolation**
 - Wähle **Knotenvektor** $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ [ist evtl. schon gegeben]
 - Zu jedem t_i ist P_i gegeben
 - Um interpolierten Wert an der Stelle $t \in [t_0, t_n]$ zu bestimmen, bestimme i mit $t \in [t_i, t_{i+1}]$, weiter mit P_i, P_{i+1} wie oben, und $t' = t - t_i$

- Variante der stückweise linearen Interpolation im 1D
- Gegeben x_i, x_{i+1} und y_i, y_{i+1}
 - y_i könnte z.B. = Höhe, Rot-Kanal, o.ä. sein
- Gesucht y für $x \in [x_i, x_{i+1}]$
- Lineare Interpolation:

$$t := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \in [0, 1] \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$y = (1 - t) y_i + t y_{i+1}$$



Das Prinzip "3 Punkte liegen immer in einer Ebene" in der Architektur



Aus der Sendung
"Einstein" vom
25.10. 2012 des
Schweizer
Fernsehens SF

Ebenen / Dreiecke

- Durch 3 Punkte wird eine Ebene aufgespannt
- Parameterdarstellung:

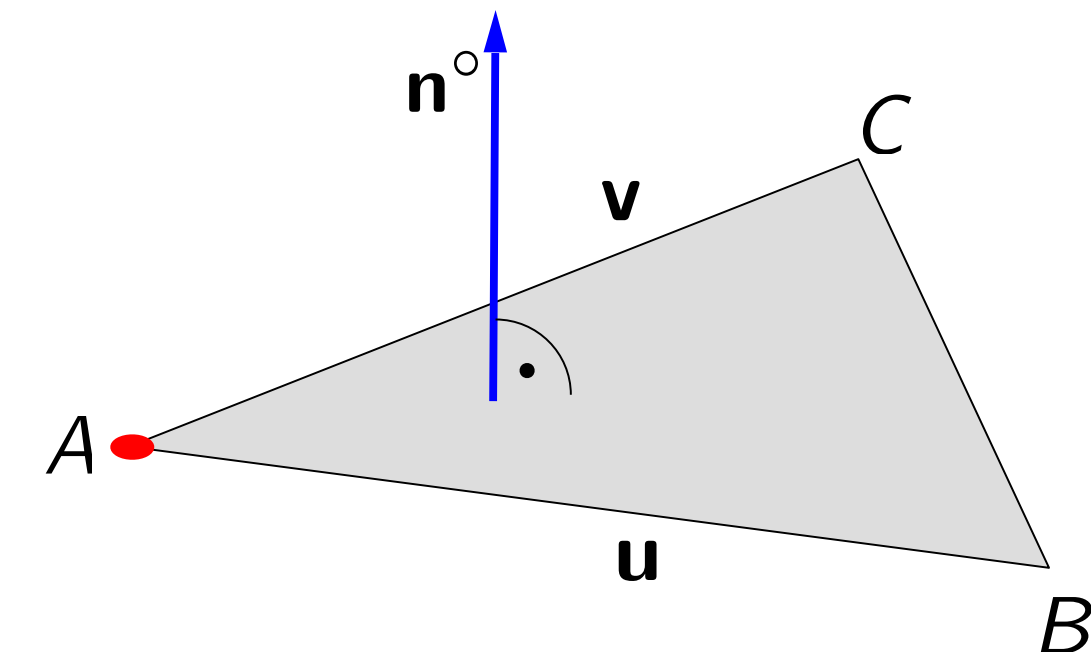
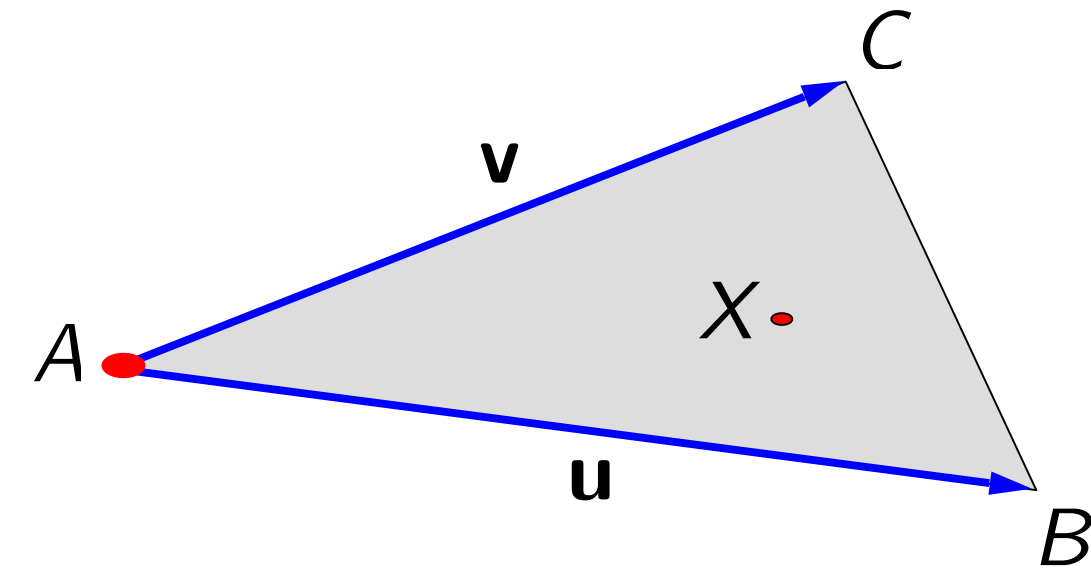
$$X = A + s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$$

- Für Dreiecke gilt zusätzlich:

$$s, t \in (0, 1), \quad s + t \leq 1$$

- **Normale** eines Dreiecks / einer Ebene:

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$$



Exkurs: Verallgemeinerung $\rightarrow$ Simplex im $\mathbb{R}^d$

FYI

- **Simplex** := Polyeder mit genau $d+1$ **affin unabhängigen Punkte**

- Verbindung dieser Punkte + "Inneres"

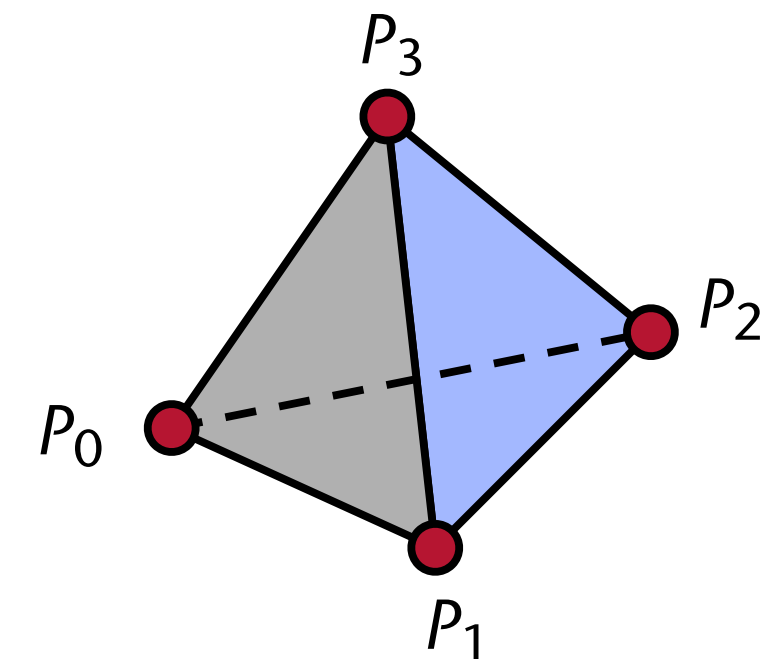
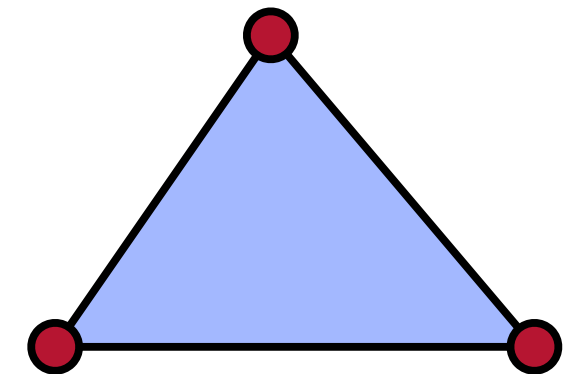
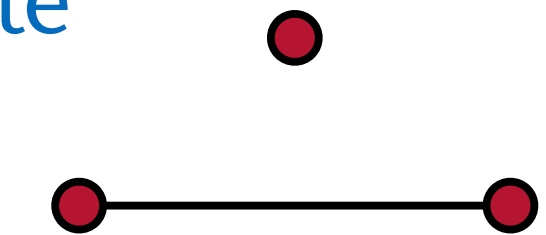
- Beispiele:

- 0D Simplex $\rightarrow$ Punkt
- 1D Simplex $\rightarrow$ Geradenstück ("Linie")
- 2D Simplex $\rightarrow$ Dreieck
- 3D Simplex $\rightarrow$ Tetraeder

- Allgemein:

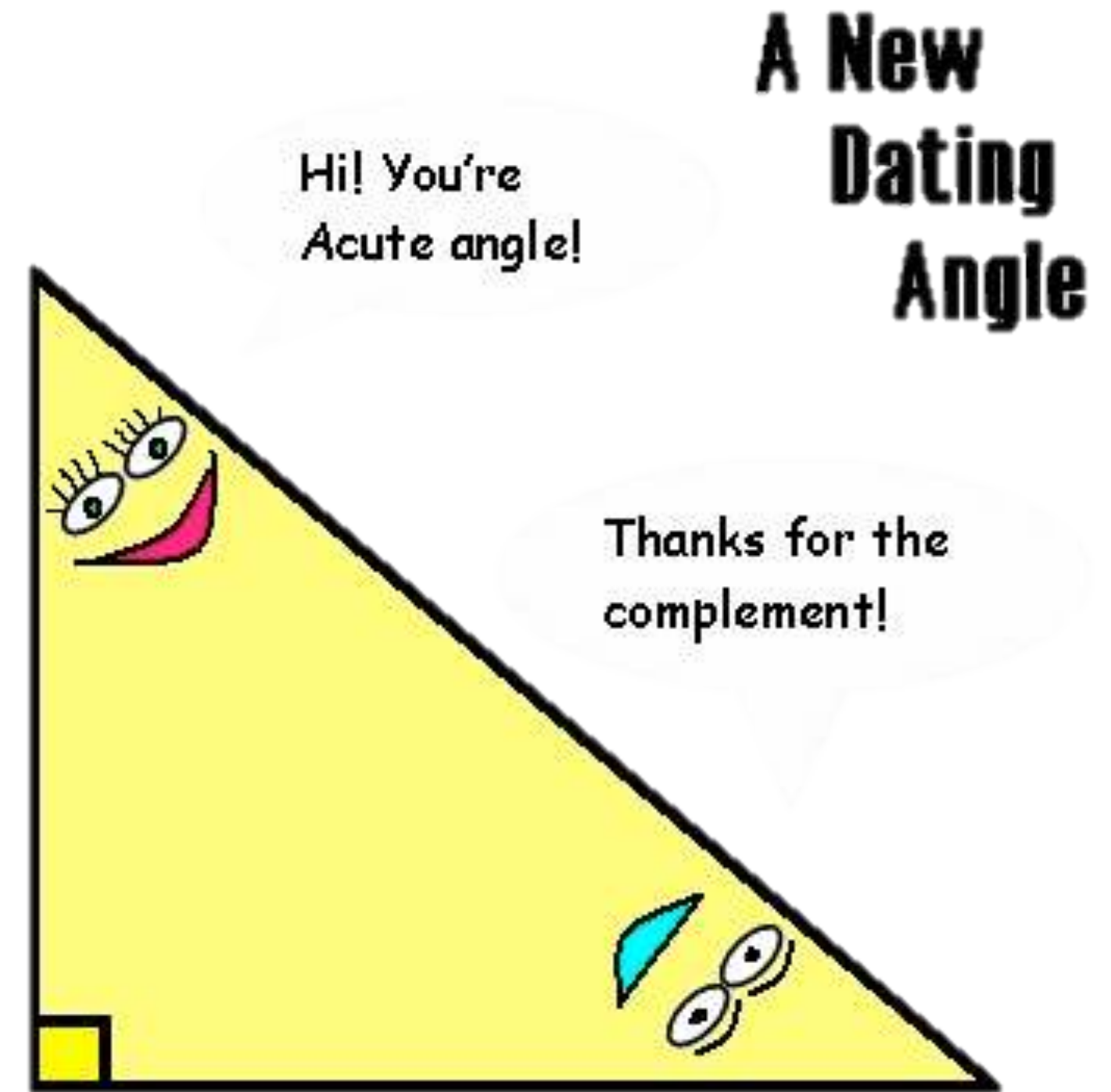
- Punkte $P_0, \dots, P_d$
- Simplex = alle Punkte X mit

$$X = P_0 + \sum_{i=1}^d s_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i = P_i - P_0, \quad s_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^d s_i \leq 1$$



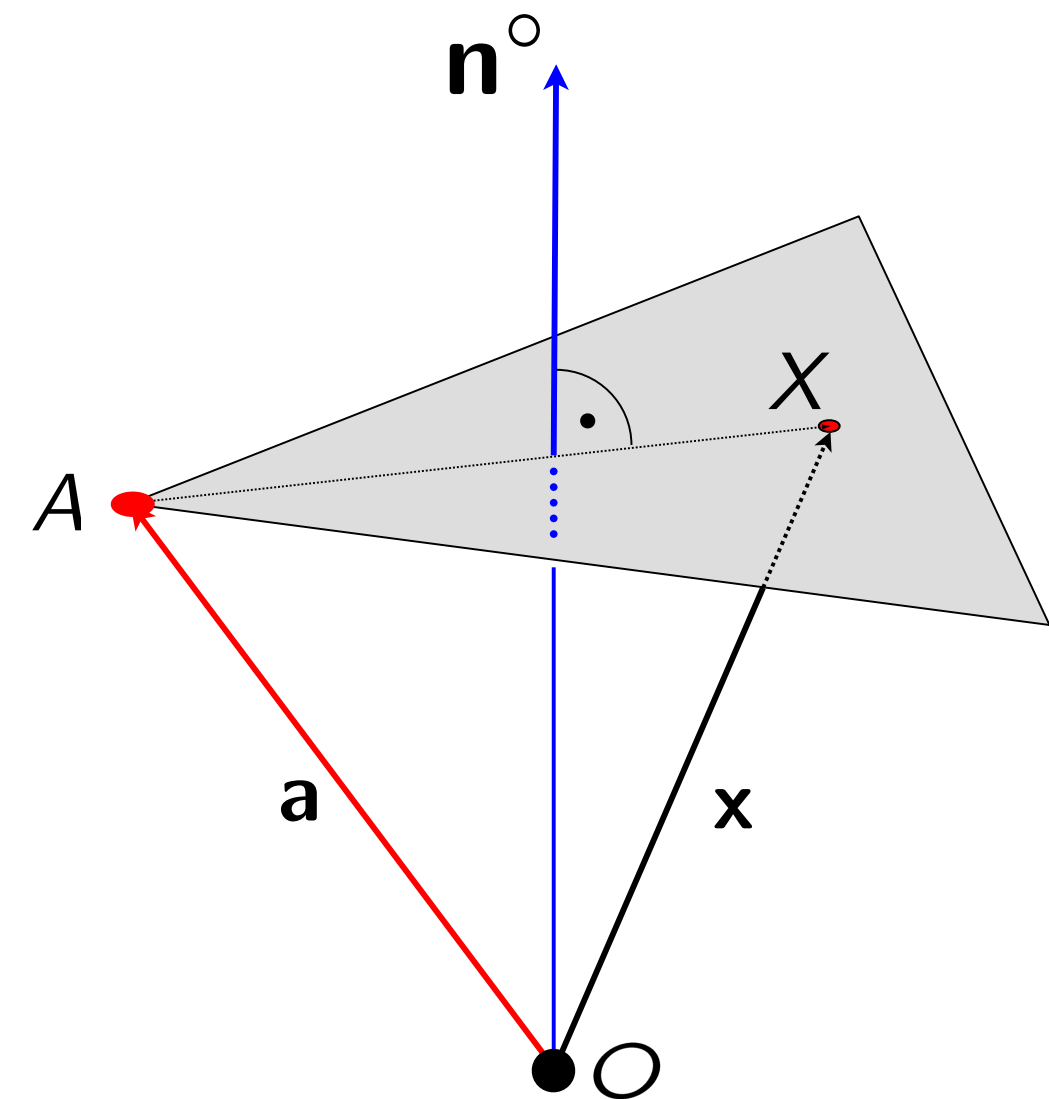
- Englische Terminologie:
"angle" = Winkel (fig. Blickwinkel)
"*acute angle*" = spitzer Winkel
"*obtuse angle*" = stumpfer Winkel

When Two Angles Meet
Something about this
just ain't right.



Normalenform der Ebene (implizite Form)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AX} \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ (X - A) \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - d &= 0\end{aligned}$$



- Geometrische Interpretation:
 - Betrachte die Gerade durch den Ursprung in Richtung $\mathbf{n}^\circ$
 - Jeder Punkt X ist ein Punkt der Ebene, gdw. er, auf diese Gerade projiziert, den gleichen Abstand vom Ursprung hat, wie die Projektion von A auf diese Gerade

- Mini-Lemma:

Eine Ebene $(\mathbf{n}, d)$ im $\mathbb{R}^k$ definiert

3 Äquivalenzklassen:

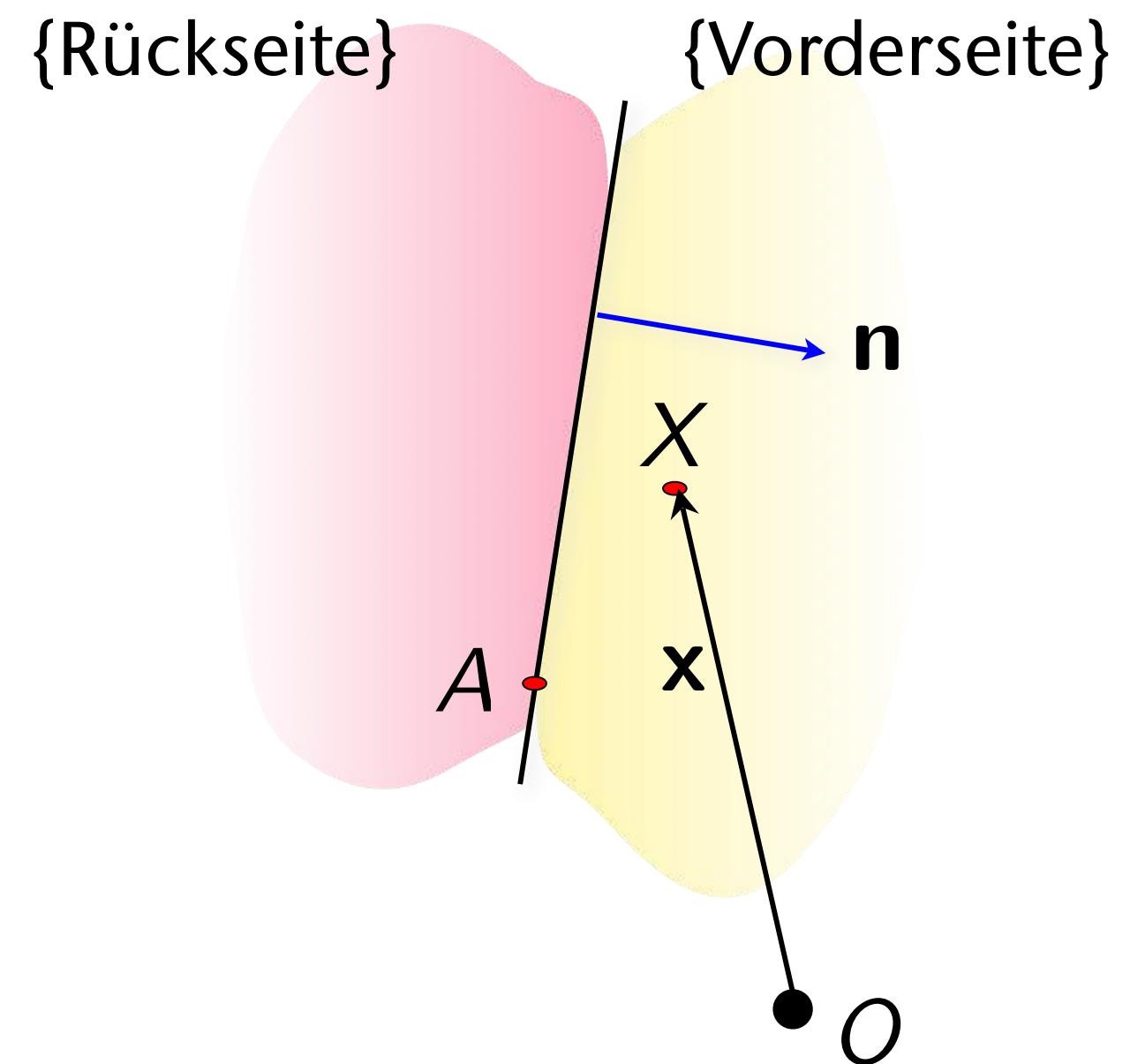
"Vorderseite" $:= \{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d > 0\}$

"Rückseite" $:= \{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d < 0\}$

Ebene selbst $:= \{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d = 0\}$

- Warum ist die Beschriftung korrekt?

- Weil $(X - A) \cdot \mathbf{n} = |X - A| \cdot |\mathbf{n}| \cdot \cos \theta$



Die Dualität von Punkten und Geraden in 2D

FYI

Homogeneous representation of line

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow (a, b, c)^T$$

A point $x = (x, y, 1)^T$ lies on the line $l = (a, b, c)^T$

$$x^T l = l^T x = 0$$

equivalently,

$$x \cdot l = l \cdot x = 0$$

Intersection of two lines $l = (a, b, c)^T$ and $l' = (a', b', c')^T$

$$x^T l = x^T l' = 0 \Rightarrow x = l \times l'$$

Line through two points $x = (x, y, 1)^T$ and $x' = (x', y', 1)^T$

$$l^T x = l^T x' = 0 \Rightarrow l = x \times x'$$

Duality of point and line

- Points and lines can be swapped.