

University of Bremen, Germany

cgvr.cs.uni-bremen.de

Definitionen

- Def.: **affin unabhängig**

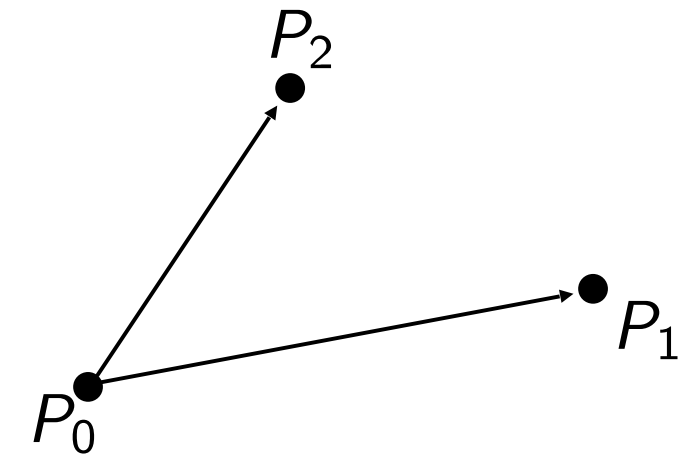
Gegeben: $k+1$ Punkte $P_i \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq i \leq k$.

Seien dadurch k Vektoren v_i definiert: $v_i := P_i - P_0$, $i = 1, \dots, k$

Die Punkte P_i heißen **affin unabhängig** $\Leftrightarrow$

die Vektoren v_i linear unabhängig sind.

- Beispiel:



- Lemma:

Falls die $k+1$ Punkte $P_i \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig sind $\Rightarrow k \leq n$.



- Def.: affines Koordinatensystem

Wenn $k+1$ Punkte $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig sind, so definieren sie ein affines Koordinatensystem (aka. affine Basis).

- Def.: baryzentrische Kombination, baryzentrische Koordinaten

Seien $k+1$ affin unabhängige Punkte $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Daraus kann man weitere Punkte konstruieren mittels einer baryzentrische Kombination (a.k.a. affine Kombination):

$$P = \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i, \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Die λ_i heißen baryzentrische Koordinaten von P bzgl. der Koordinatensystems $[P_0, P_1, \dots, P_k]$

Eindeutigkeit der baryzentrischen Koordinaten

- Satz (o. Bew.):

Die Punkte $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, sind **affin unabhängig** $\Leftrightarrow$ die affine Kombination bzgl. dieser Punkte ist **eindeutig**, d.h.

$$\forall s_i, t_i \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum s_i = \sum t_i = 1 :$$

$$\sum s_i P_i = \sum t_i P_i \Leftrightarrow \forall i = 0, \dots, k : s_i = t_i$$

- Konsequenz: falls die Punkte $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$, **nicht** affin unabhängig sind, dann kann es mehrere mögliche λ 's geben!

Affine Abbildungen

- Definition:

Affine Abbildung := jede Abbildung ϕ , die invariant bzgl. affiner Kombinationen ist

Affine Invarianz bedeutet:

$$\phi(P) = \phi\left(\sum \lambda_i P_i\right) = \sum \lambda_i \phi(P_i)$$

- M.a.W.: eine affine Abbildung ist eindeutig durch die Bilder der affinen Basis festgelegt.
- Vorgriff (o. Bew.): Affine Abbildungen "="
 $\{\text{alle lineare Abbildungen}\} + \{\text{alle Translationen}\}$

Kleiner Exkurs: die **konvexe Hülle**

- Definition: **konvexe Hülle**

Seien $P_0, \dots, P_k$ Punkte (*nicht* notw.weise affin unabhängige Pkte).
Dann ist die **konvexe Hülle** dieser Punkte definiert als:

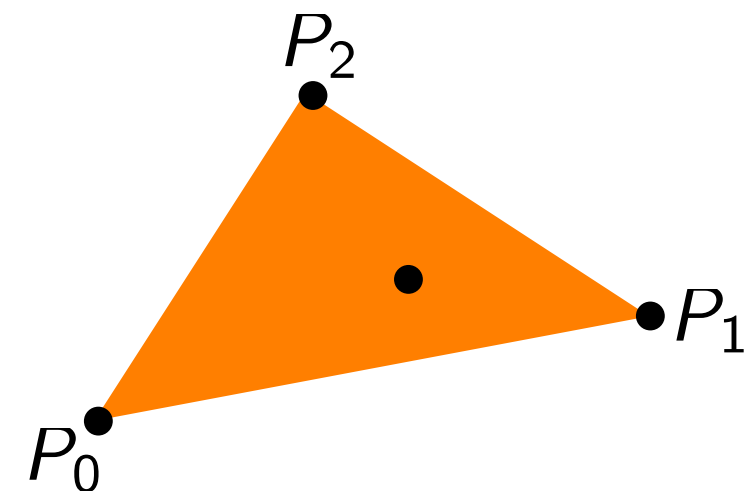
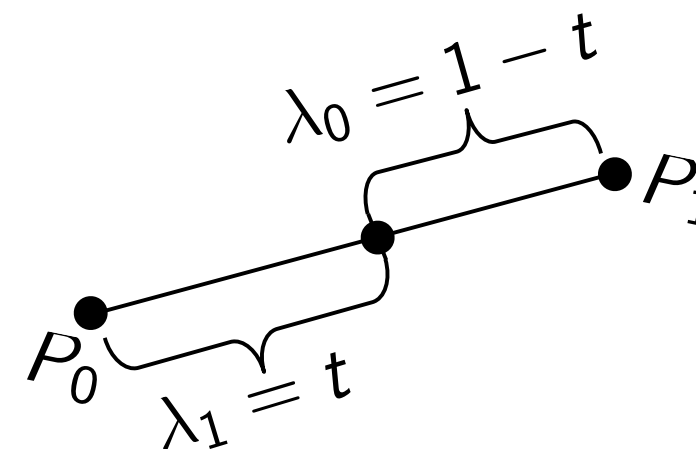
$$\text{CH}(P_0, \dots, P_k) := \left\{ P \mid P = \sum \lambda_i P_i, \sum \lambda_i = 1, \forall i : \lambda_i \geq 0 \right\}$$

In diesem Fall gilt $\forall i : 0 \leq \lambda_i \leq 1$.

Eine solche Summe heißt auch **konvexe Kombination**.

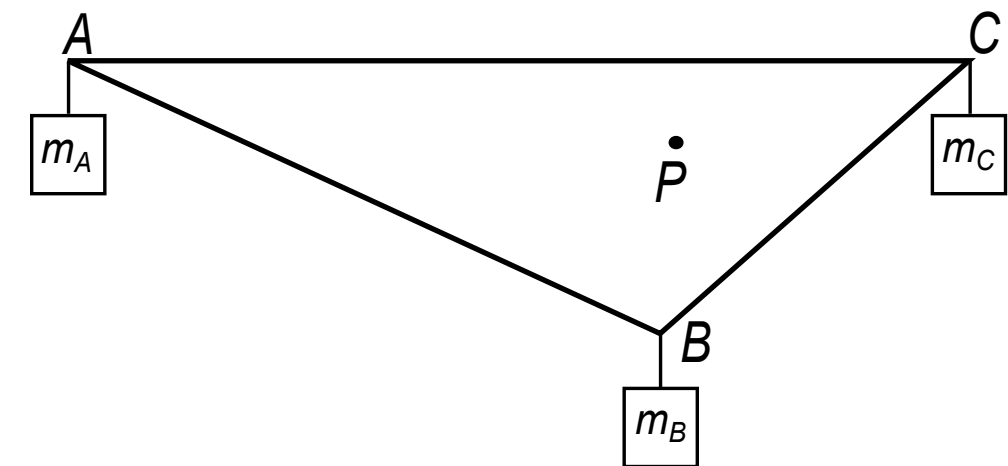
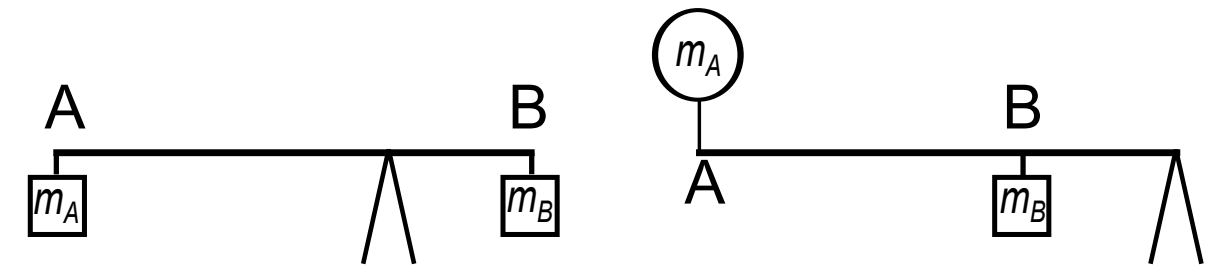
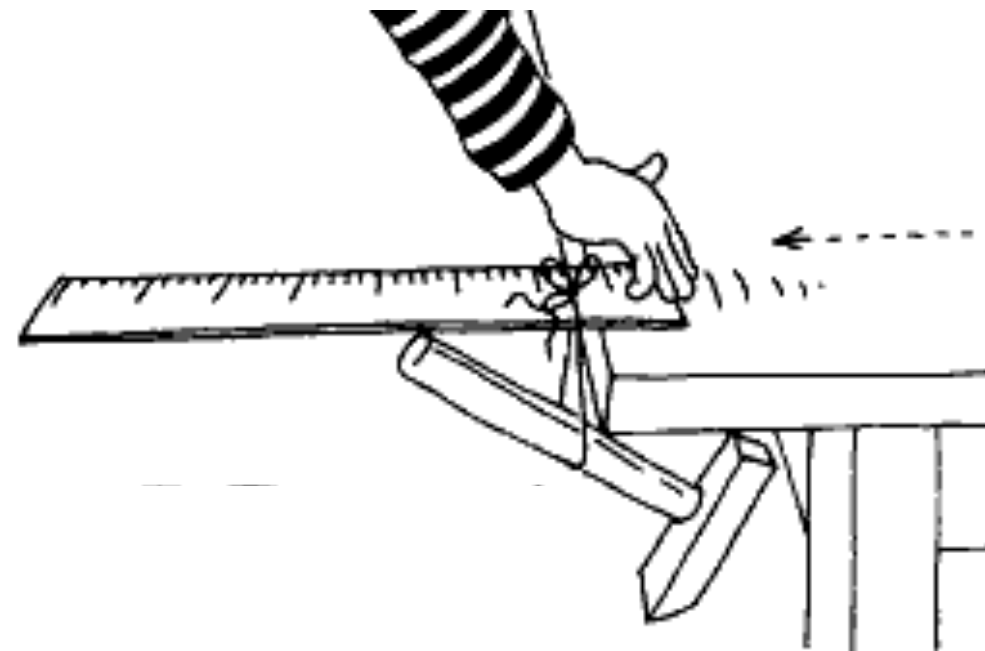
- Beispiele:

- $P_0, P_1 \rightarrow$ Strecke
- $P_0, P_1, P_2 \rightarrow$ Dreieck



Physikalische Interpretation

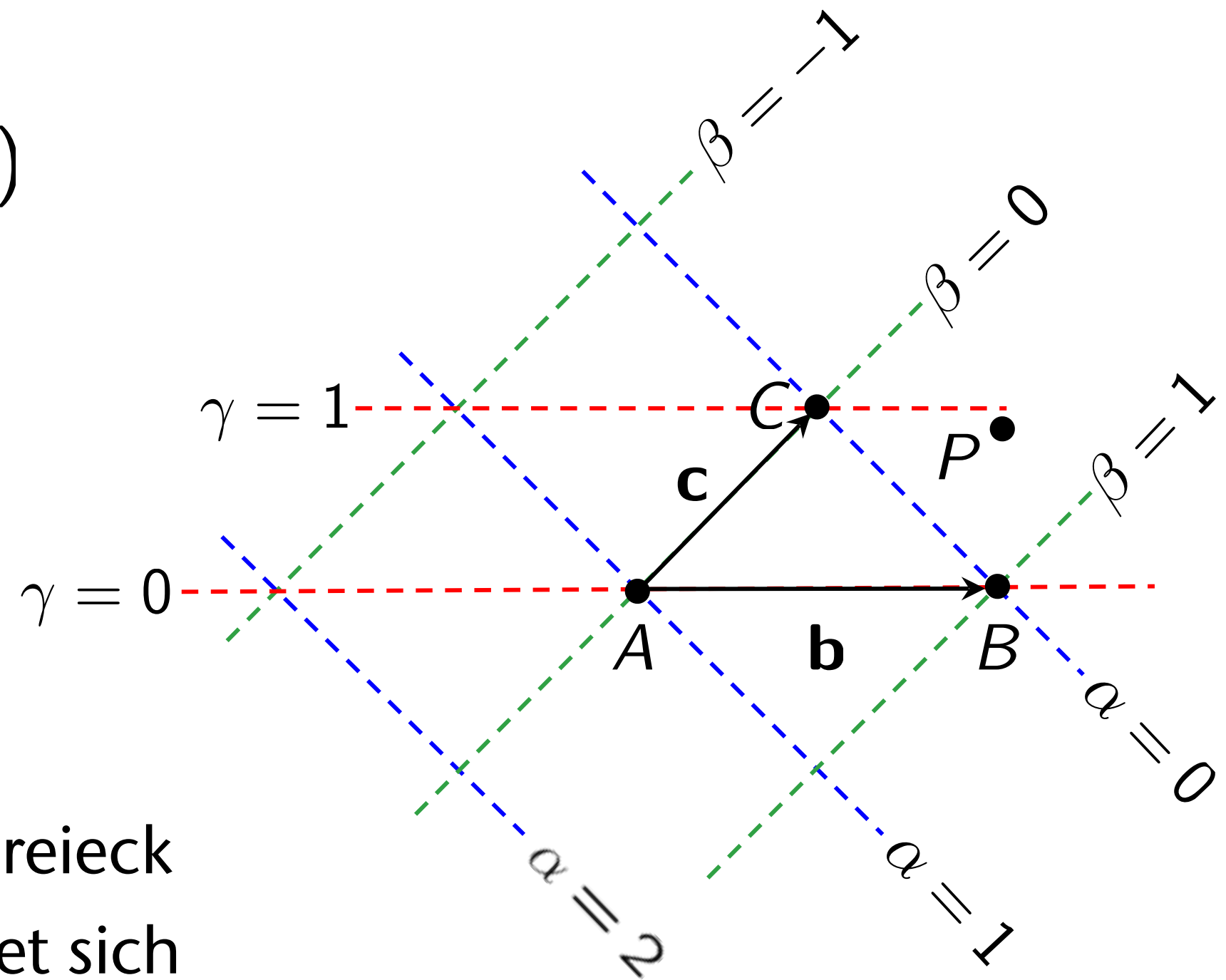
- Gegeben $k + 1$ Punkte $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ mit den Massen m_i , $\sum m_i \neq 0$
- Definiere die "normierten Massen" $\lambda_i = \frac{m_i}{\sum m_i}$
- Dann ist der Punkt $P = \sum \lambda_i P_i$ genau der **Schwerpunkt** der $k+1$ Punkte
 - A.k.a. **Barycenter**



$$\begin{aligned}
 P &= A + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \\
 &= A + \beta (B - A) + \gamma (C - A) \\
 &= \underbrace{(1 - \beta - \gamma)}_{\alpha} A + \beta B + \gamma C \\
 &= \alpha A + \beta B + \gamma C
 \end{aligned}$$

mit $\alpha + \beta + \gamma = 1$

Das funktioniert auch mit einem Dreieck im $\mathbb{R}^n$; die Zeichnung hier befindet sich dann in der Ebene des Dreiecks!



Häufige Aufgabe

- Bestimme die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes P bzgl. des Dreiecks A, B, C

- Lösungsweg 1:

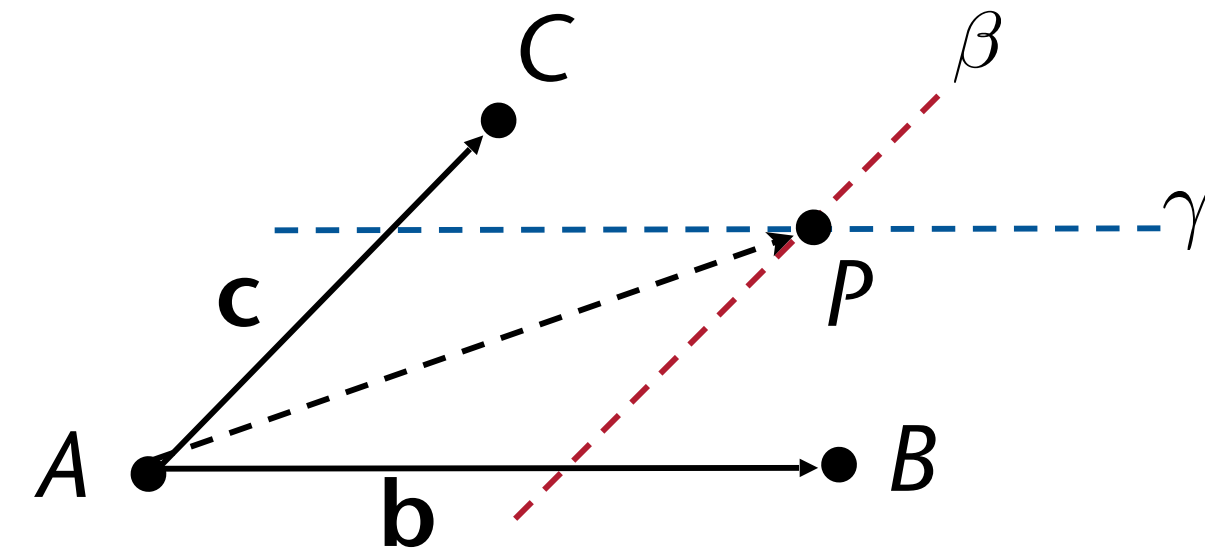
- Setze $\mathbf{b} = B - A$, $\mathbf{c} = C - A$, $\mathbf{q} = P - A$

- Ansatz: $\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \stackrel{!}{=} \mathbf{q}$

- Löse das LGS

$$\begin{pmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$

- Setze $\alpha = 1 - \beta - \gamma$

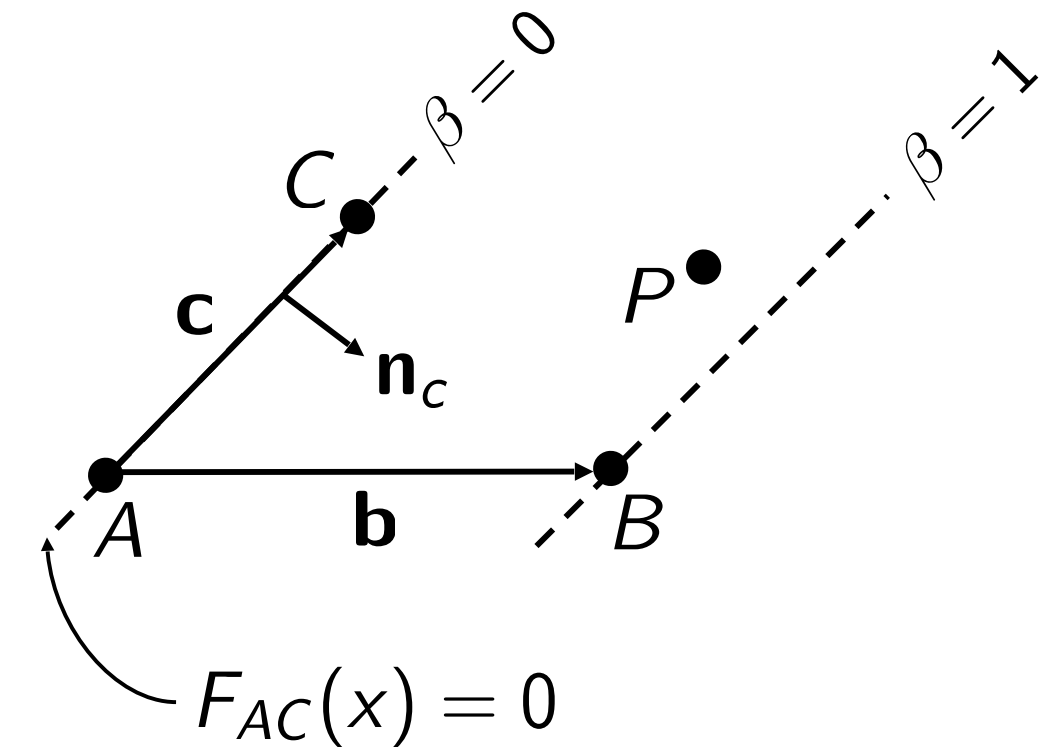


Lösungsweg 2

- Verwende die Beobachtung: alle Punkte P mit dem selben Abstand von der Geraden $\overline{AC}$ haben dieselbe baryzentrische Koordinate

- Setze

$$F_{AC}(P) := \underbrace{\frac{n_c \cdot (P - A)}{n_c \cdot (B - A)}}_{\text{Normierung}} \quad n_c := \begin{pmatrix} c_y \\ -c_x \end{pmatrix}$$



- Damit ist $F_{AC}(A) = F_{AC}(C) = 0$,
und $F_{AC}(B) = 1$ (wegen Normierung)
- Definiere analog F_{AB} und F_{BC}
- Damit ist $\alpha = F_{BC}(P)$, $\beta = F_{AC}(P)$, $\gamma = F_{AB}(P)$

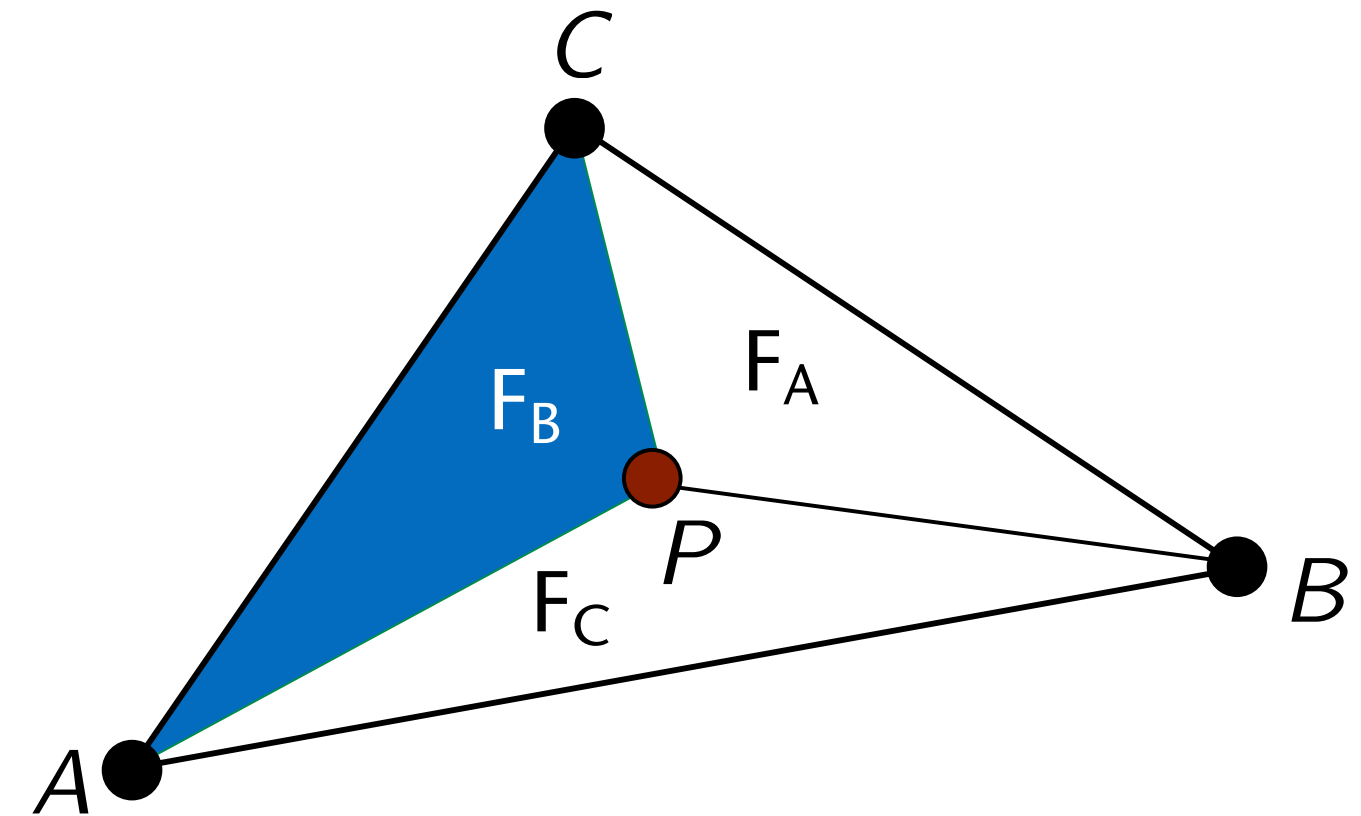
Lösungsweg 3

- Nutze den geometrischen Zusammenhang zwischen Flächeninhalten und baryzentrische Koordinaten:

$$F_A(P) = F(\Delta PBC)$$

$$F = F_A + F_B + F_C$$

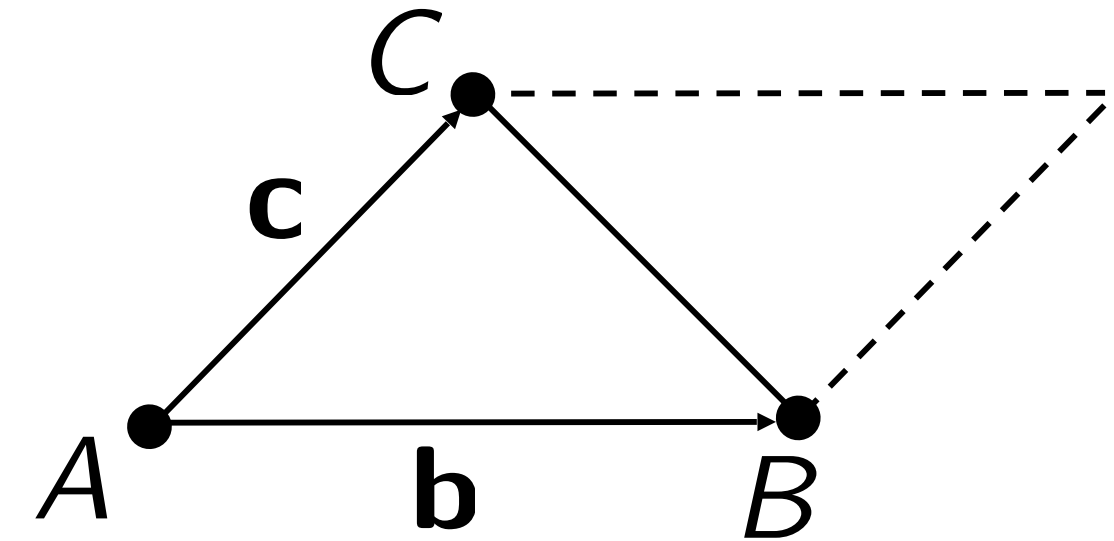
$$\alpha = \frac{F_A}{F} \quad \beta = \frac{F_B}{F} \quad \gamma = \frac{F_C}{F}$$



Erinnerung

- Flächeninhalt eines Dreiecks A, B, C ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Delta ABC) &= \frac{1}{2} \| \mathbf{b} \times \mathbf{c} \| \\ &= \frac{1}{2} \| (B - A) \times (C - A) \| \end{aligned}$$

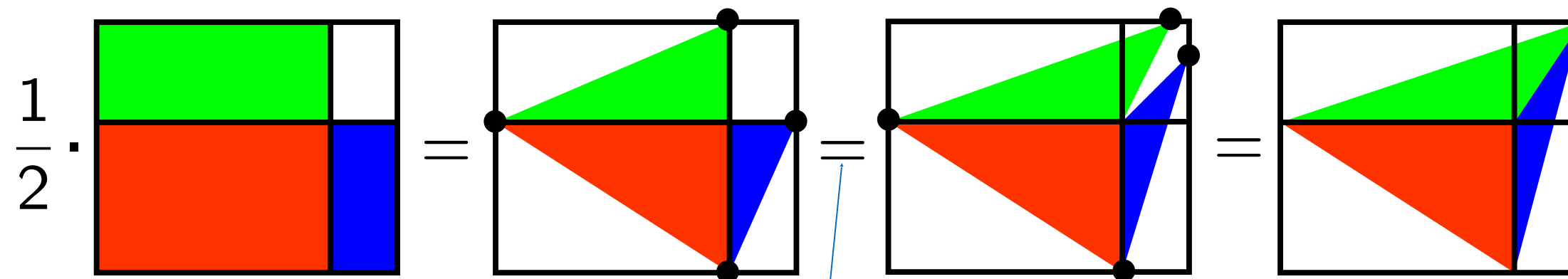
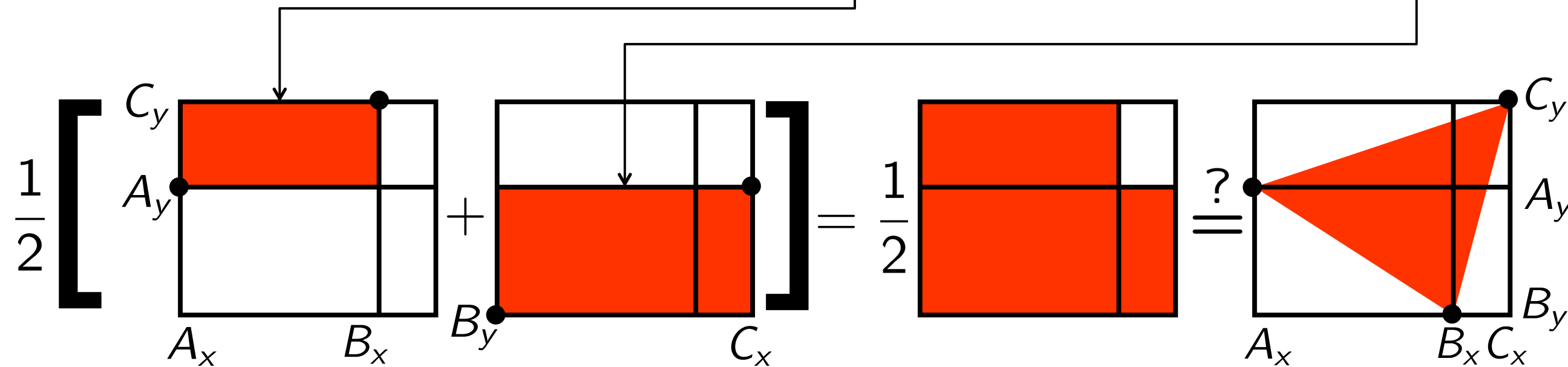


$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} B_x - A_x & C_x - A_x \\ B_y - A_y & C_y - A_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- Achtung: Achte auf den korrekten Umlaufsinn !!
- Beobachtung: Flächeninhalt = 0 $\Leftrightarrow$ Det = 0 $\Leftrightarrow$ Dreieck ist degeneriert $\Leftrightarrow$ Punkte sind nicht affin unabhängig

Exkurs: Geometrischer Beweis der Flächenformel

- Zu zeigen: $\mathcal{F}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} [(B_x - A_x)(C_y - A_y) - (C_x - A_x)(B_y - A_y)]$



denn $\mathcal{F}(\text{Dreieck}) = \frac{1}{2} \cdot \text{Basis} \cdot \text{Höhe}$

Beweis der Lösung 3

- Gegeben sei ein Dreieck A, B, C , und darin ein Dreieck P, Q, R
- Die baryzentrischen Koordinaten von P, Q, R bzgl. A, B, C seien

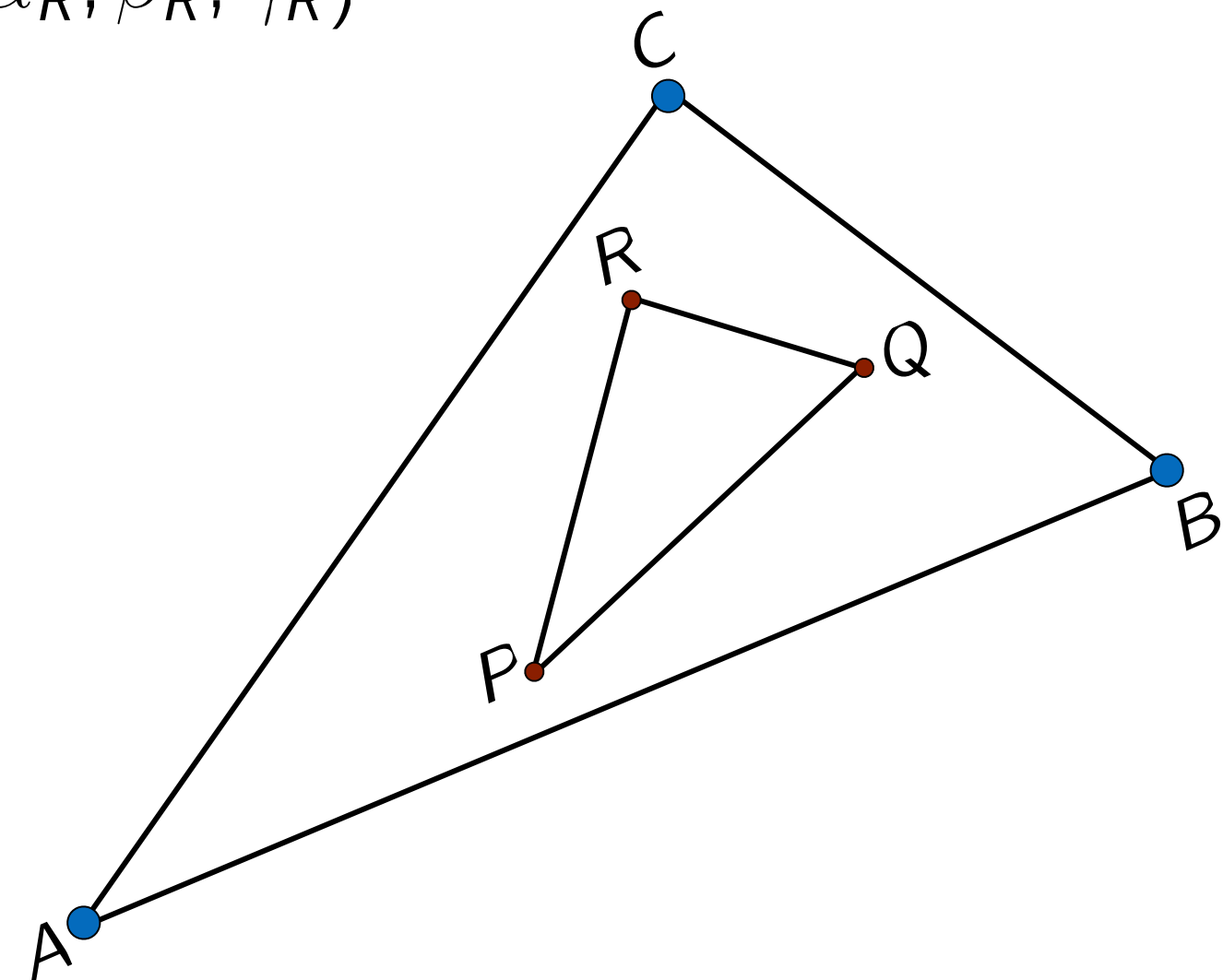
$$P : (\alpha_P, \beta_P, \gamma_P) \quad Q : (\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q) \quad R : (\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$$

d.h.

$$P = \alpha_P A + \beta_P B + \gamma_P C$$

- Generalized Routh's Theorem:

$$\mathcal{A}(\Delta PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix} \cdot \mathcal{A}(\Delta ABC)$$



Beweisskizze für Routh's Theorem

- Zur Erinnerung: Determinanten sind linear, d.h.

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ sa + tb & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = s \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

- Damit braucht man $\mathcal{A}(\Delta PQR)$ nur noch ausrechnen:

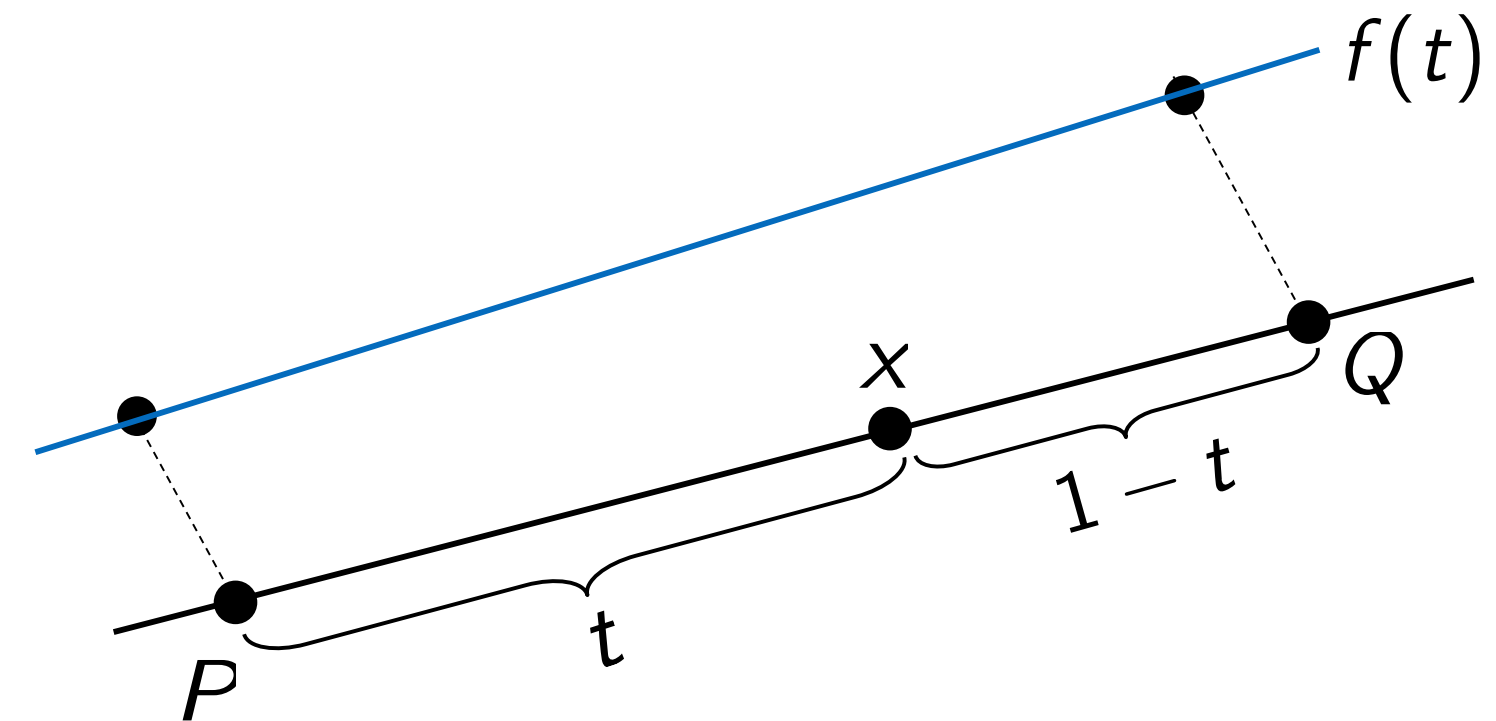
$$2\mathcal{A}(\Delta PQR) =$$

$$\begin{vmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_P A_x + \beta_P B_x + \gamma_P C_x & \alpha_Q A_x + \beta_Q B_x + \gamma_Q C_x & \alpha_R A_x + \beta_R B_x + \gamma_R C_x \\ \alpha_P A_y + \beta_P B_y + \gamma_P C_y & \alpha_Q A_y + \beta_Q B_y + \gamma_Q C_y & \alpha_R A_y + \beta_R B_y + \gamma_R C_y \\ \underbrace{\alpha_P + \beta_P + \gamma_P}_1 & \alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q & \alpha_R + \beta_R + \gamma_R \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_P \cdot \begin{vmatrix} A_x & \dots \text{s. eq. (1)} & \dots & \dots \\ A_y & & \dots & \dots \\ 1 & & \dots & \dots \end{vmatrix} + \beta_P \cdot \begin{vmatrix} B_x & \dots & \dots \\ B_y & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix} + \gamma_P \cdot \begin{vmatrix} C_x & \dots & \dots \\ C_y & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix} \\
 &= \alpha_P \cdot \left(\underbrace{\alpha_Q \begin{vmatrix} A_x & A_x & \dots \\ A_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 + \beta_Q \begin{vmatrix} A_x & B_x & \dots \\ A_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \gamma_Q \begin{vmatrix} A_x & C_x & \dots \\ A_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} \right) \\
 &\quad + \beta_P \cdot \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} B_x & A_x & \dots \\ B_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \underbrace{\beta_Q \begin{vmatrix} B_x & B_x & \dots \\ B_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 + \gamma_Q \begin{vmatrix} B_x & C_x & \dots \\ B_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} \right) \\
 &\quad + \gamma_P \cdot \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} C_x & A_x & \dots \\ C_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \beta_Q \begin{vmatrix} C_x & B_x & \dots \\ C_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \underbrace{\gamma_Q \begin{vmatrix} C_x & C_x & \dots \\ C_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 \right) = \dots
 \end{aligned}$$

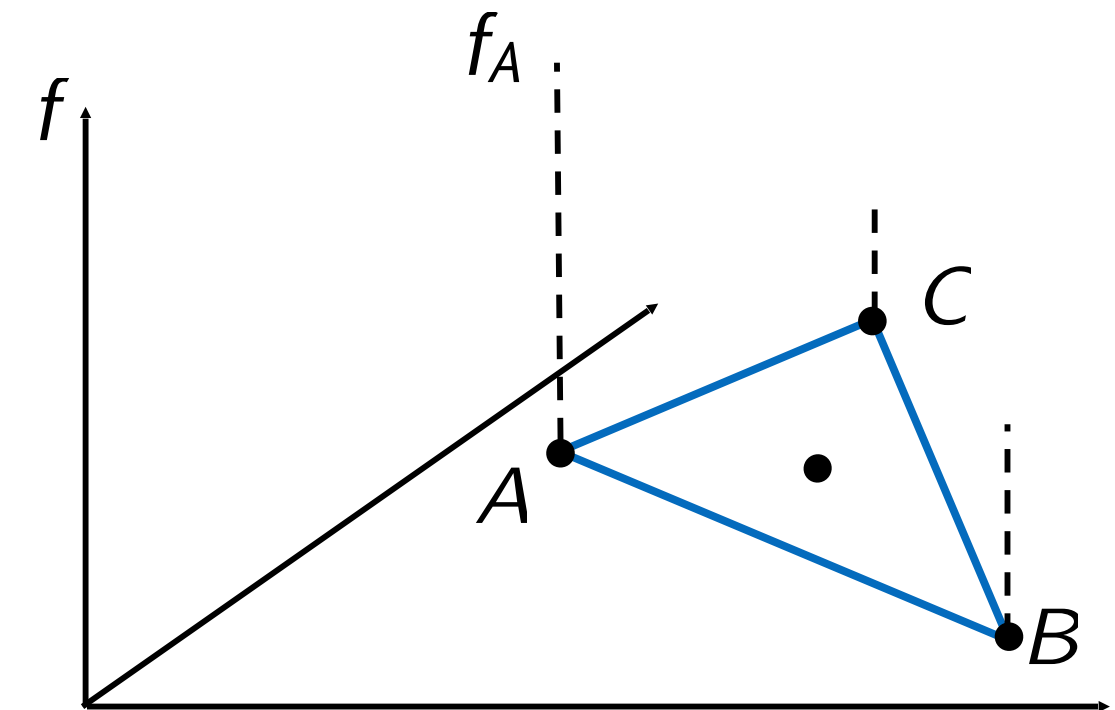
Erinnerung: lineare Interpolation

- Sei ein skalarer Wert an P und Q vorgegeben: $f(P)=f_1$, $f(Q)=f_2$
- Dann kann man jedem Punkt X auf der Geraden $\overline{PQ}$ einen Wert $f(X)$ zuordnen
- Sei t der Parameter von X , also $X = (1 - t) \cdot P + t \cdot Q$
- Dann setze $f(X) = (1 - t) \cdot f(P) + t \cdot f(Q)$



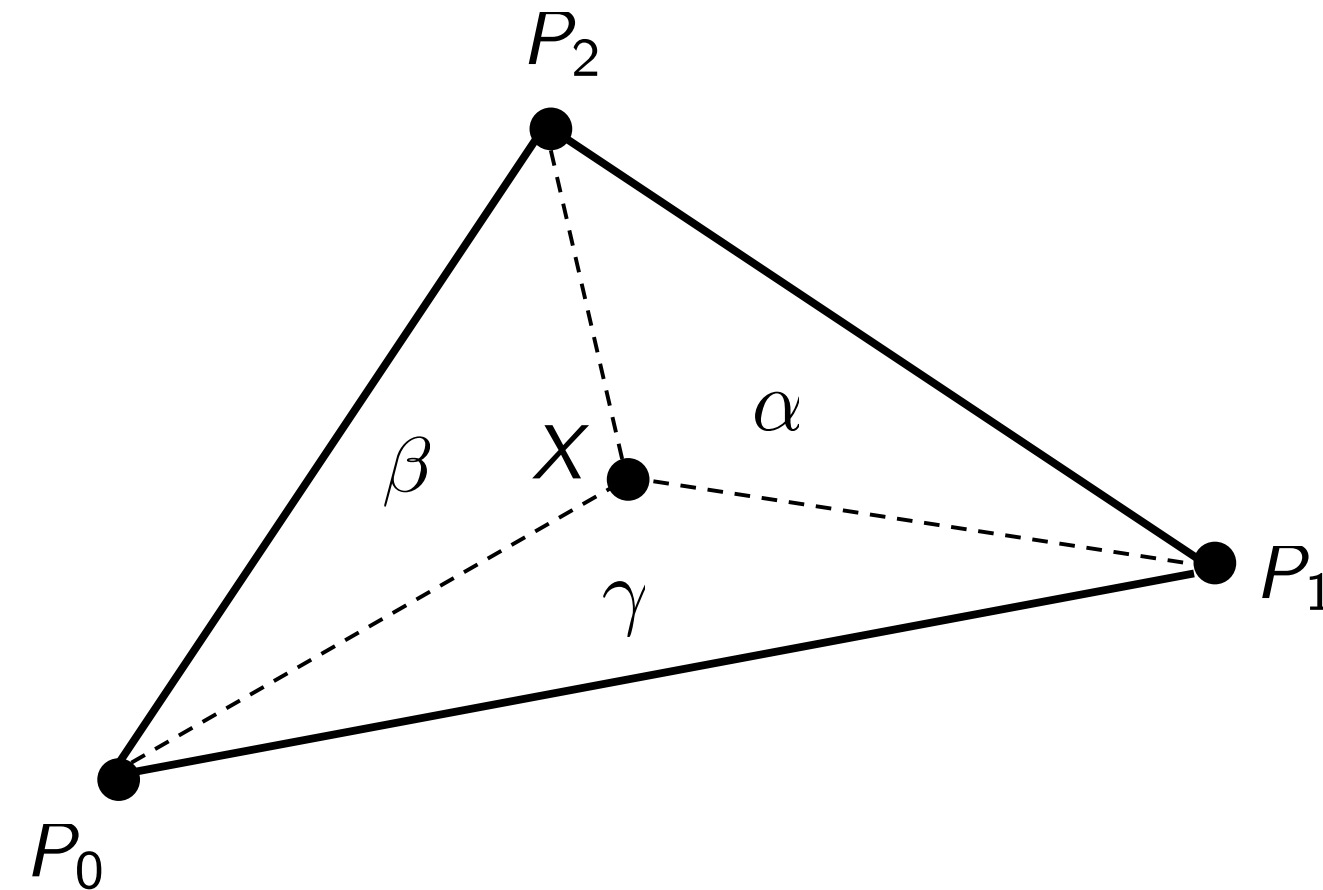
Baryzentrische Interpolation

- Gegeben: "Höhen" f_A, f_B, f_C an den Punkten A, B, C (z.B. f = Grauwerte)
- Gesucht: eine Funktion f , so daß die f_A, f_B, f_C interpoliert werden
- Idee: für einen beliebigen Punkt X , bestimme dessen baryzentrische Koordinaten, interpoliere damit die Funktionswerte
- Konkret: Sei $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$
- Setze $f(X) = \alpha f_A + \beta f_B + \gamma f_C$
- Funktioniert auch für X außerhalb $\triangle ABC$
- Funktioniert auch für $f_A, f_B, f_C \in \mathbb{R}^m$ (z.B. Farben)
- Bemerkung: Auf den Kanten des Dreiecks entspricht dies gerade einer *linearen Interpolation*



Weitere Anwendung: Punkt-in-Dreieck-Test

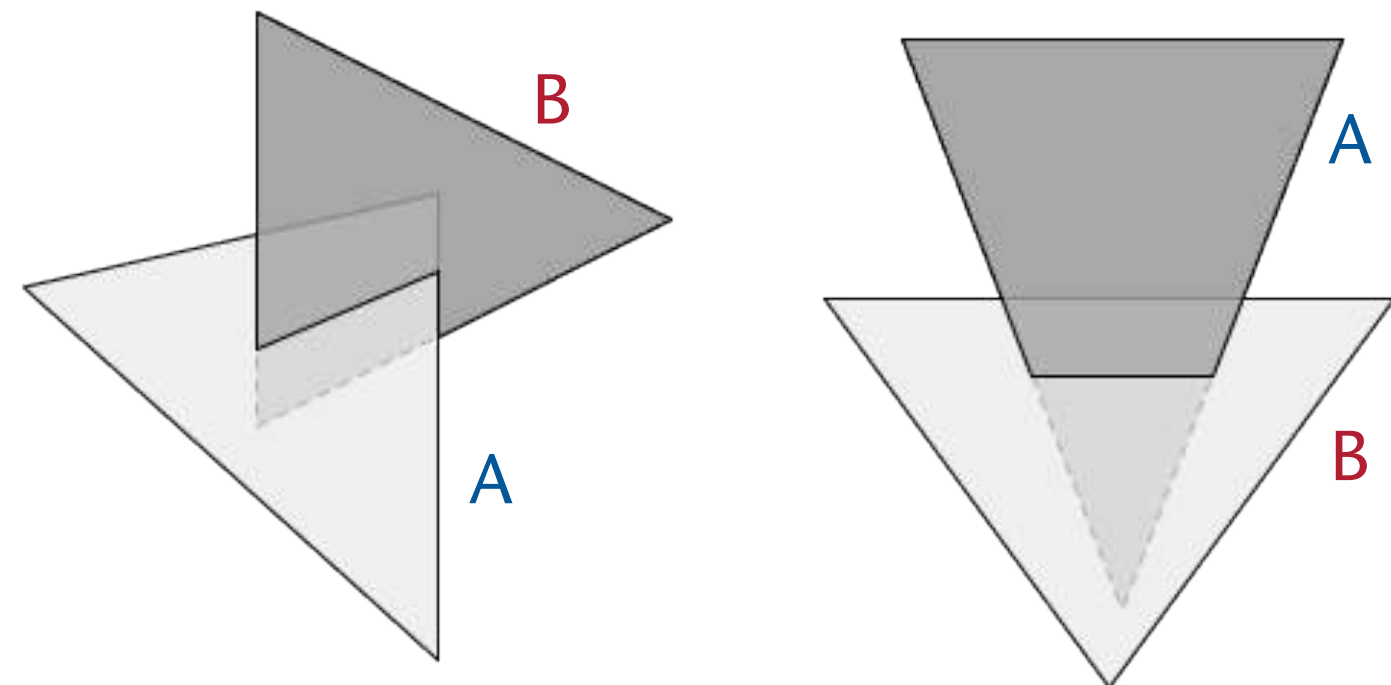
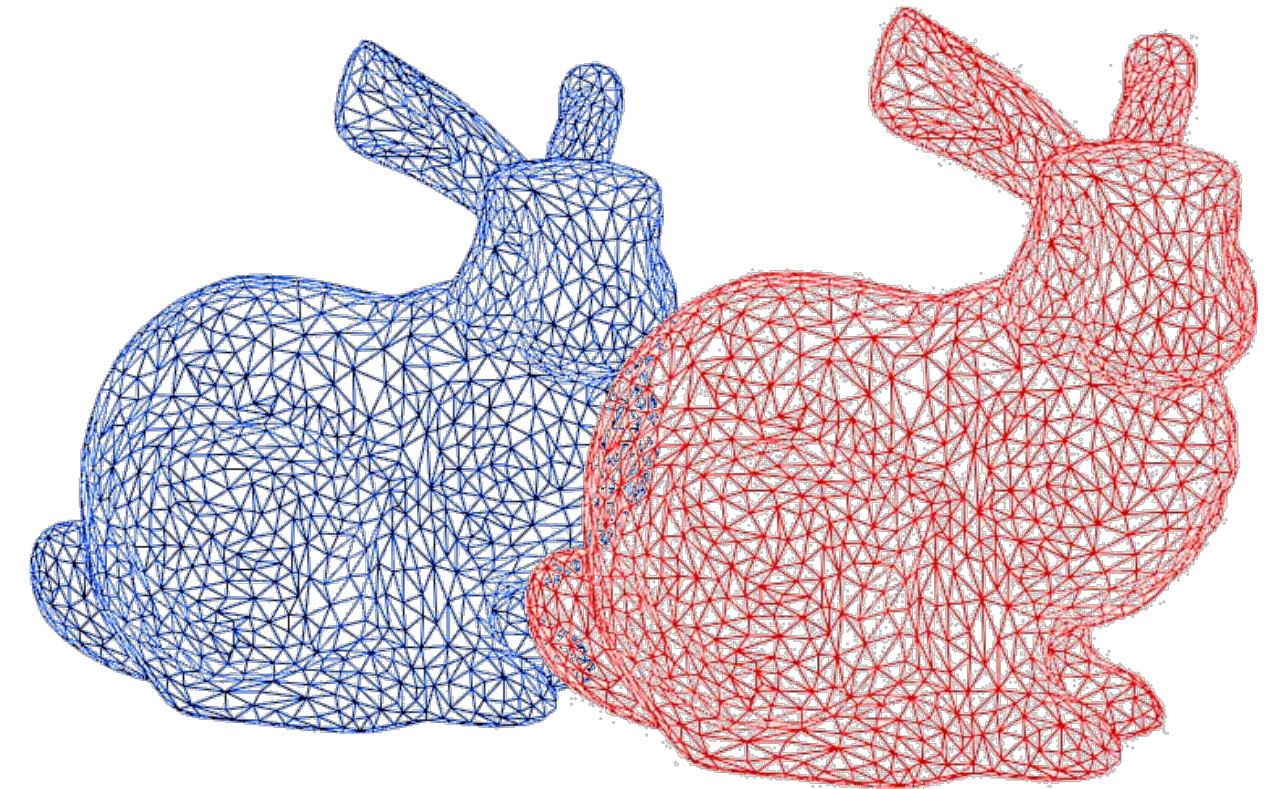
- Der Punkt X ist im Inneren des Dreiecks $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma > 0$



Anwendung: kürzester Abstand zwischen Punkt und Dreieck

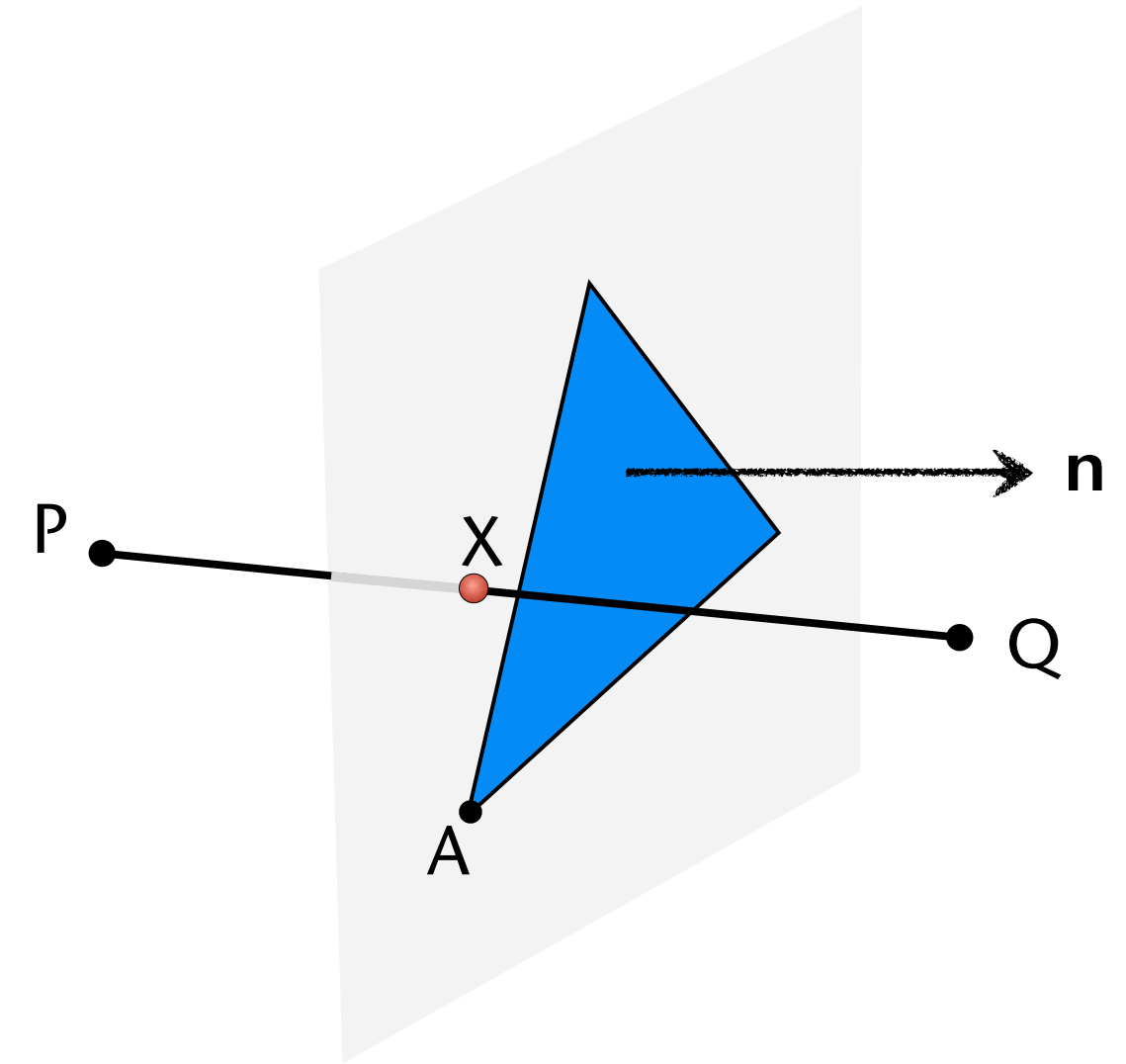
Anwendung: Schnittest Dreieck-Dreieck

- Das Problem "Collision Detection":
 - Finde ein (oder alle) Paare von Polygonen, die sich schneiden (*witnesses*)
 - Viele pfiffige Verfahren, aber Grundoperation am Ende ist immer ein, bzw. viele Polygon-Polygon-Schnittests
- Vereinfachung: zwei Dreiecke
- Verfahren:
 - Teste alle Kanten von B auf Schnitt gegen A
 - Und nochmal umgekehrt
 - Abbruch, sobald der erste Schnitt gefunden



Schnitt Kante-Dreieck

- Ansatz
 - Ebenengleichung: $\mathbf{n} \cdot X - d = 0$
 - Liniengleichung: $X = P + t\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = Q - P$
- Einsetzen: $t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - d + \mathbf{n}P = 0$
$$\Rightarrow t = \frac{d - \mathbf{n}P}{\mathbf{n}\mathbf{r}}$$
 - Check: $t \in [0,1]$; falls nein $\rightarrow$ kein Schnitt; falls ja $\rightarrow$ X ausrechnen
 - Baryzentrische Koordinaten für X berechnen $\rightarrow \alpha, \beta, \gamma$
 - Check: $\alpha, \beta, \gamma > 0$; falls ja $\rightarrow$ Schnitt



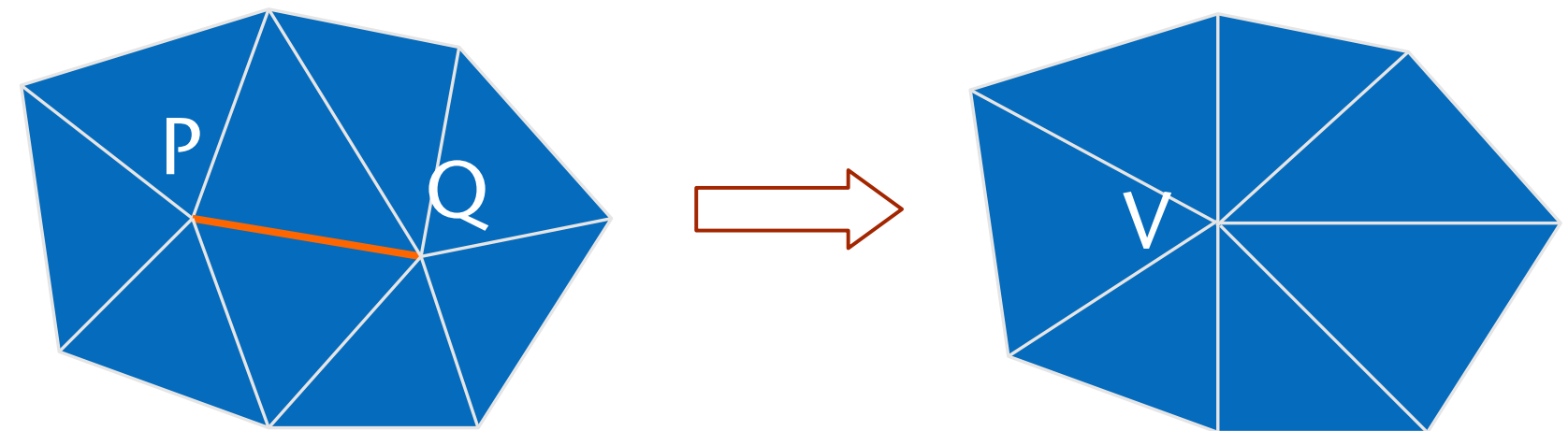
Verallgemeinerung der baryzentrischen Koord. in 3D

Anwendung: Mesh Simplification

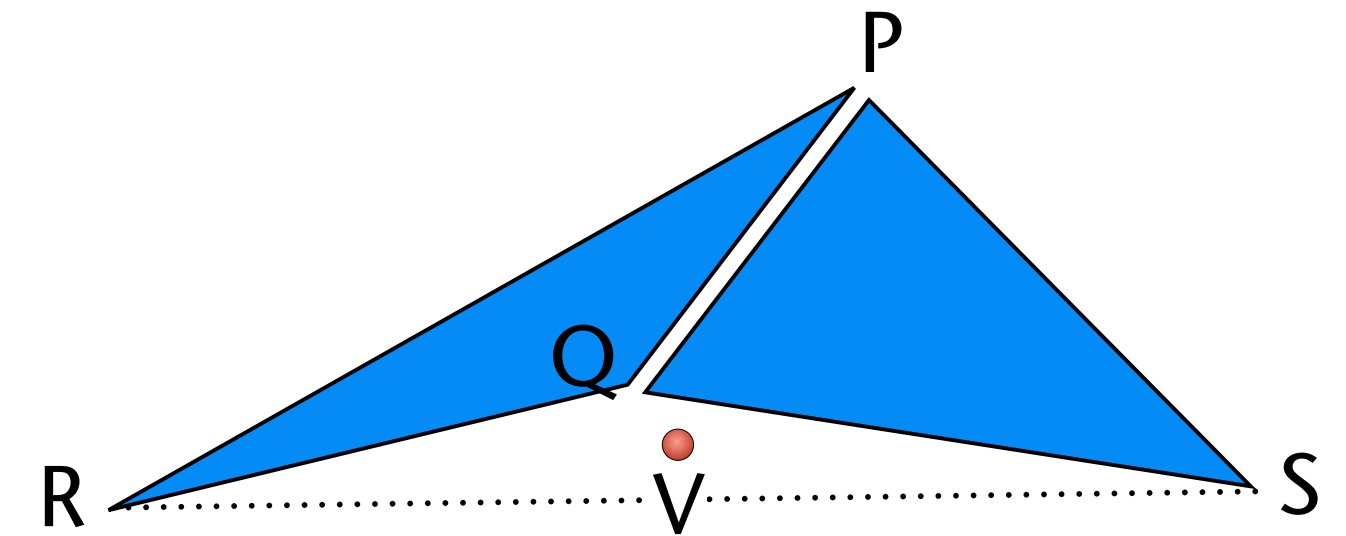
- Ziel: erzeuge "low-poly" Meshes aus gegebenem "high-poly" Input



- Fundamentale Operation: edge collapse



- Position von V wird durch Simplifizierungsalgorithmus bestimmt
- Problem: berechne Farbe (u.a. Attribute) für den neuen Vertex V
 - V liegt *wahrscheinlich* im Inneren des Tetraeders $PQRS$, aber nicht notwendigerweise
- Lösung:
 - Berechne baryzentrische Koordinaten von V bzgl. $P, Q, R, S \rightarrow \alpha, \beta, \gamma, \delta$
 - Interpoliere damit die Farben der Ecken
 - Welche Fälle können vorkommen?

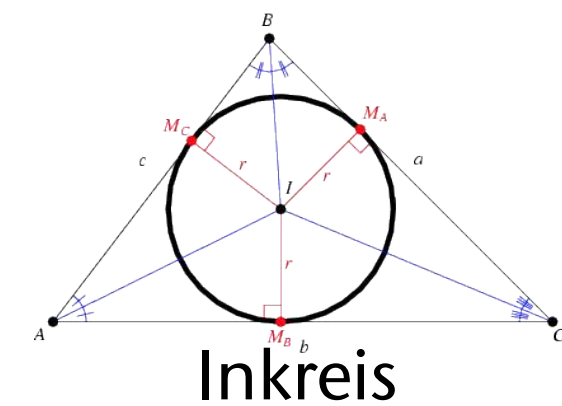
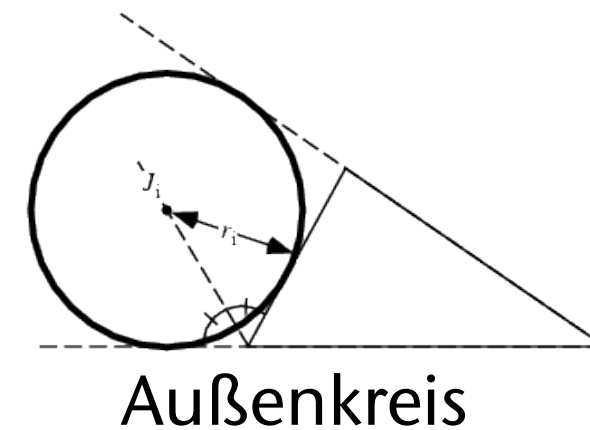
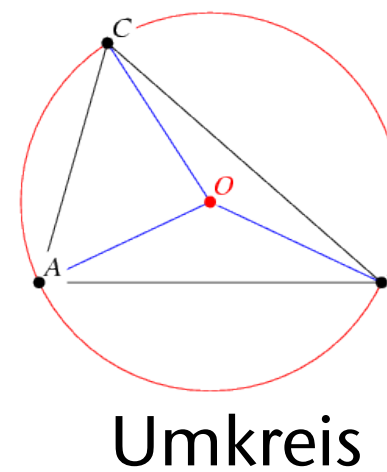
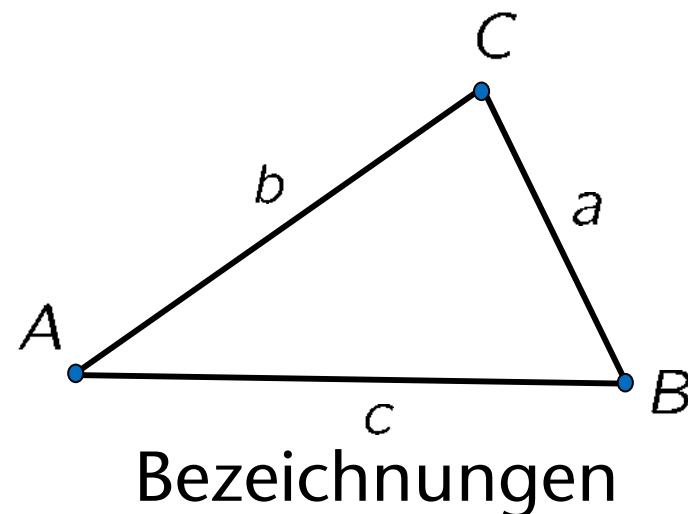


Spezielle Punkte im Dreieck

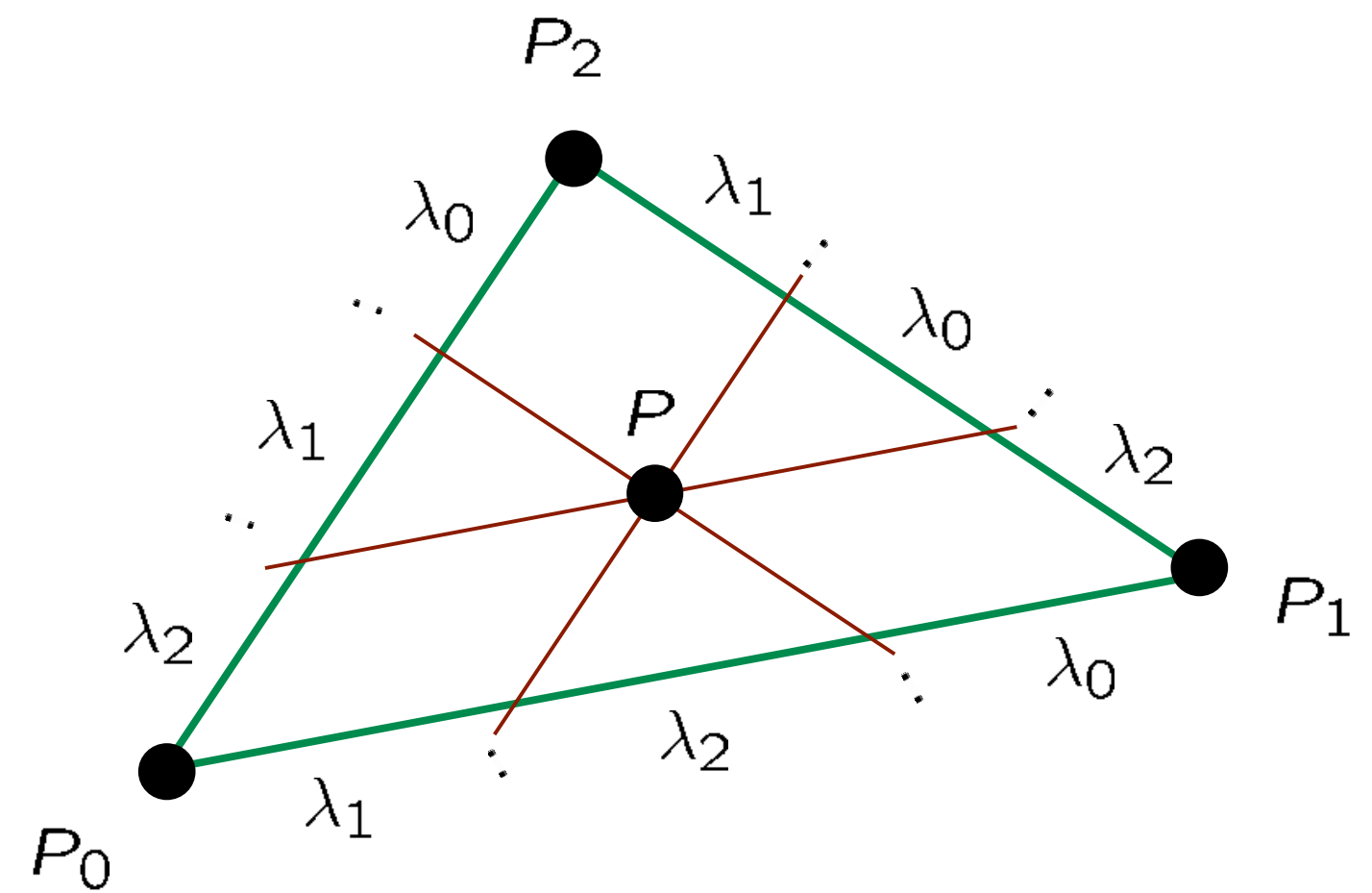
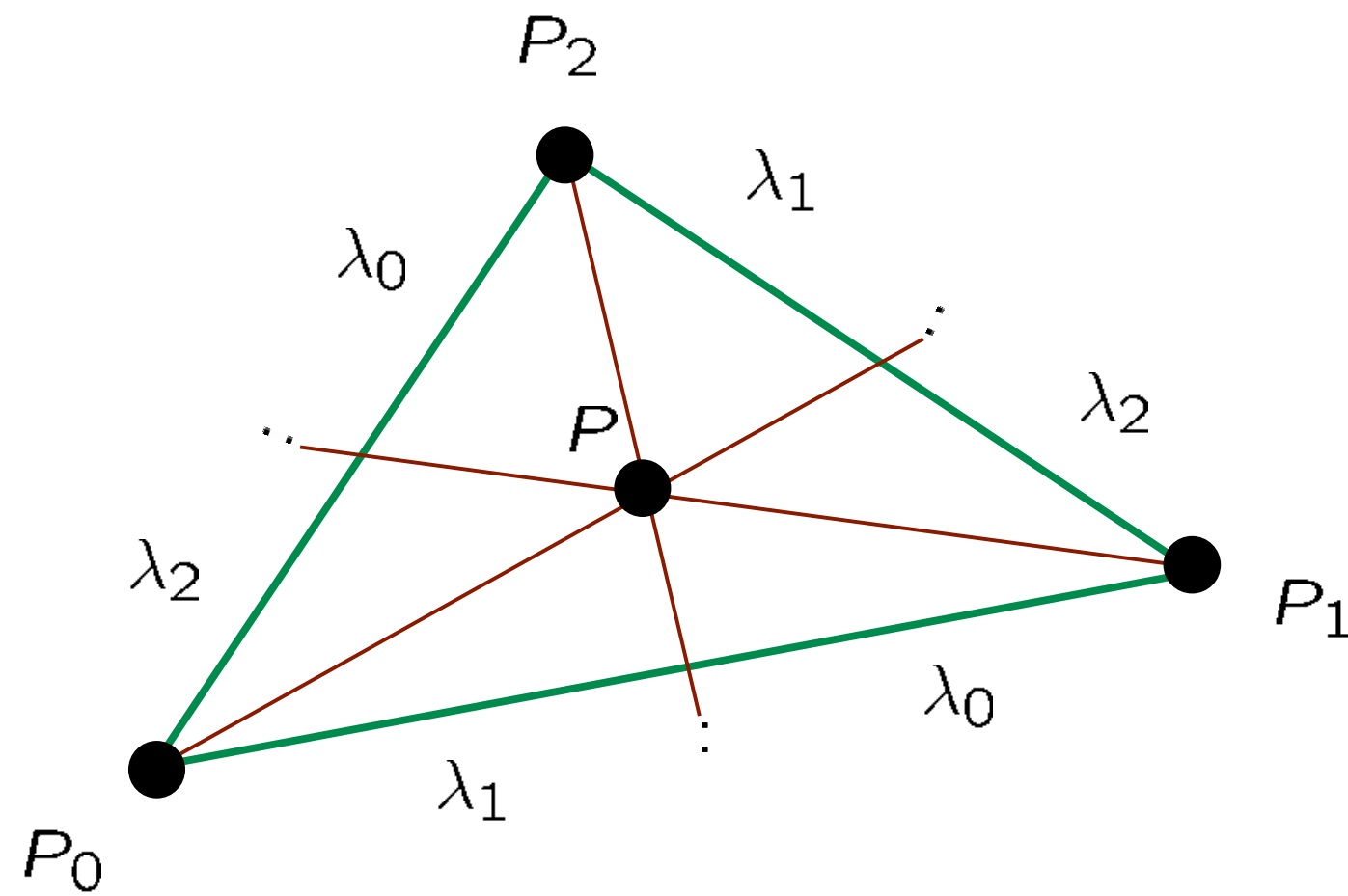
FYI

- Viele spezielle Punkte im Dreieck lassen sich mittels baryzentrischer Koordinaten sehr leicht angeben / ausrechnen (o. Bew.):

Punkt	α	β	γ
Schwerpkt.	1	1	1
Außenkreis zu A	$-a$	b	c
Inkreis	a	b	c
Umkreis	$a^2(b^2 + c^2 - a^2)$	$b^2(c^2 + a^2 - b^2)$	$c^2(a^2 + b^2 - c^2)$



- Achtung: die Koordinaten sind ohne Normierung angegeben — diese muß man also vor einer tatsächlichen Verwendung noch durchführen!



S.a. die Links zu Demos auf der VL-Homepage