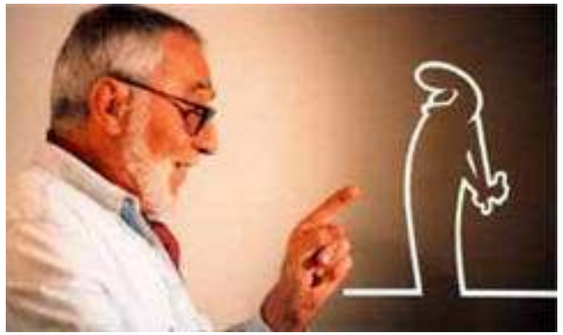
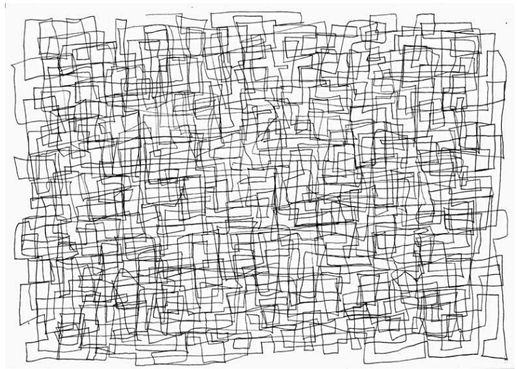
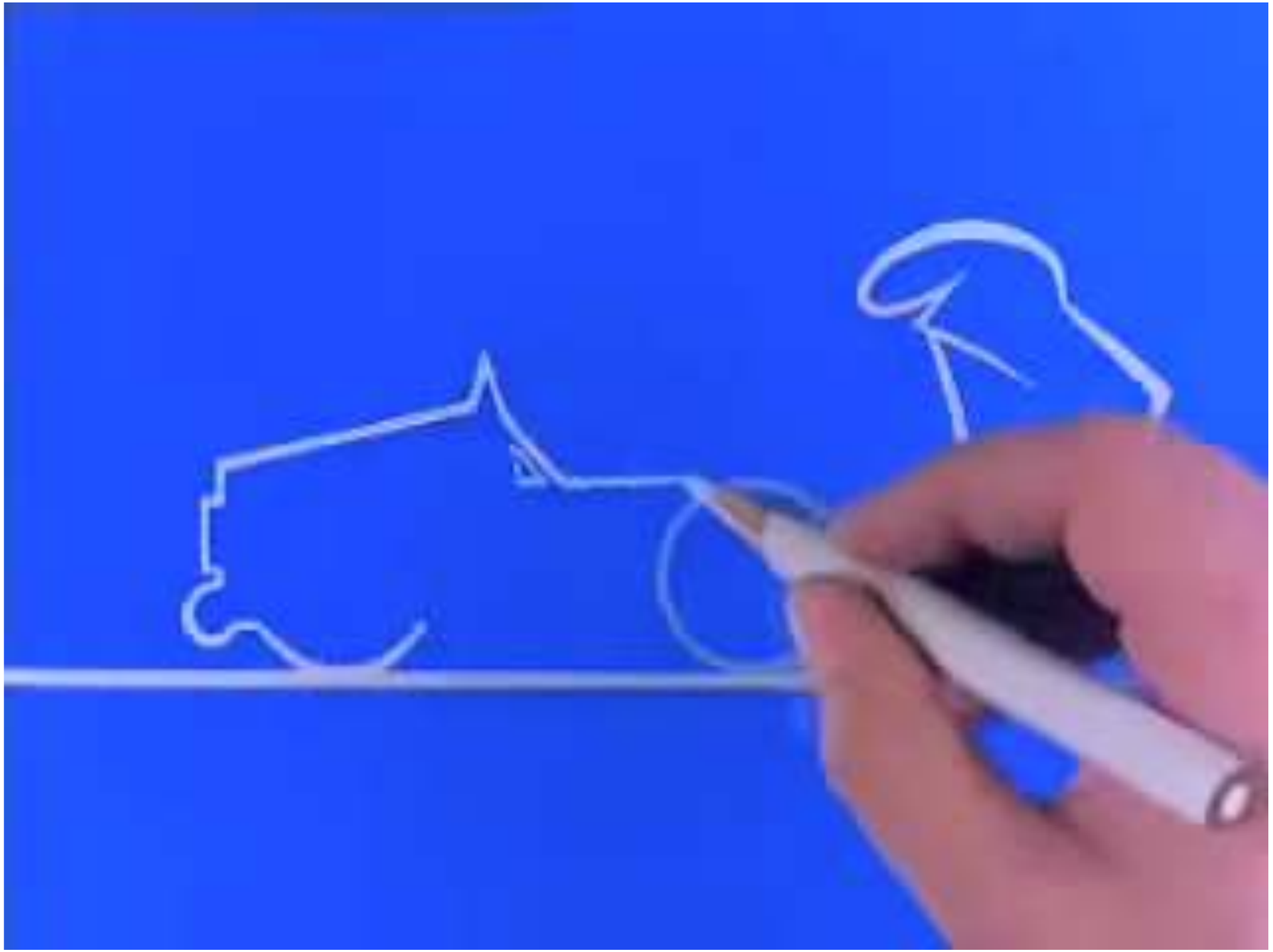
Computergraphik I

Scan Conversion of Lines





G. Zachmann
University of Bremen, Germany
cgvr.cs.uni-bremen.de

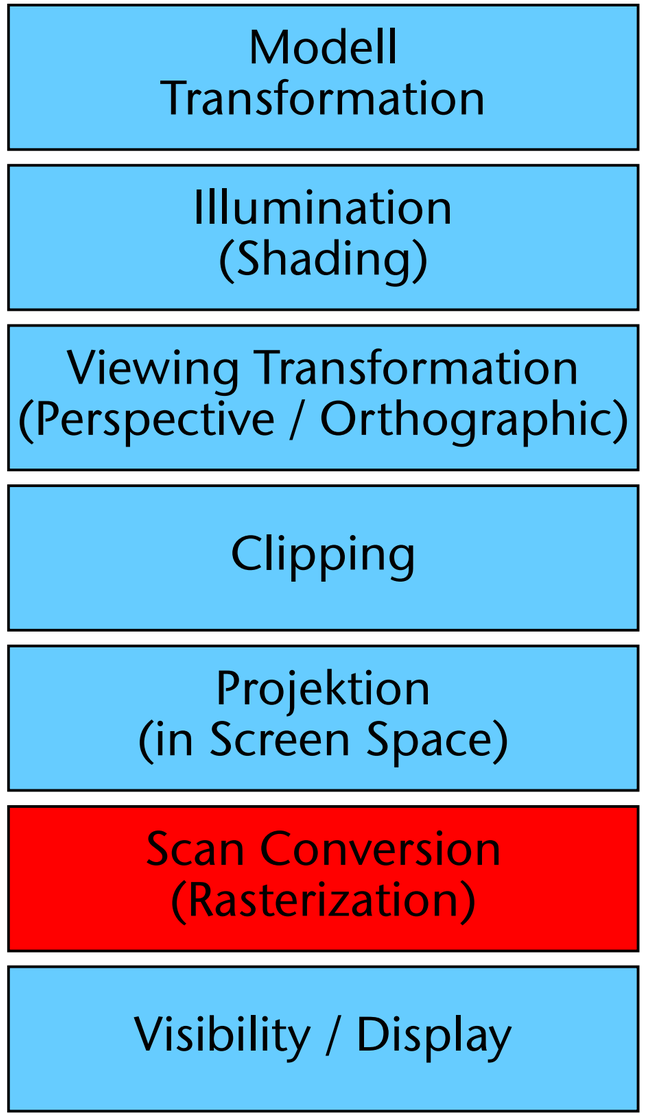


"La Linea"

Das Zeichnen von Linien

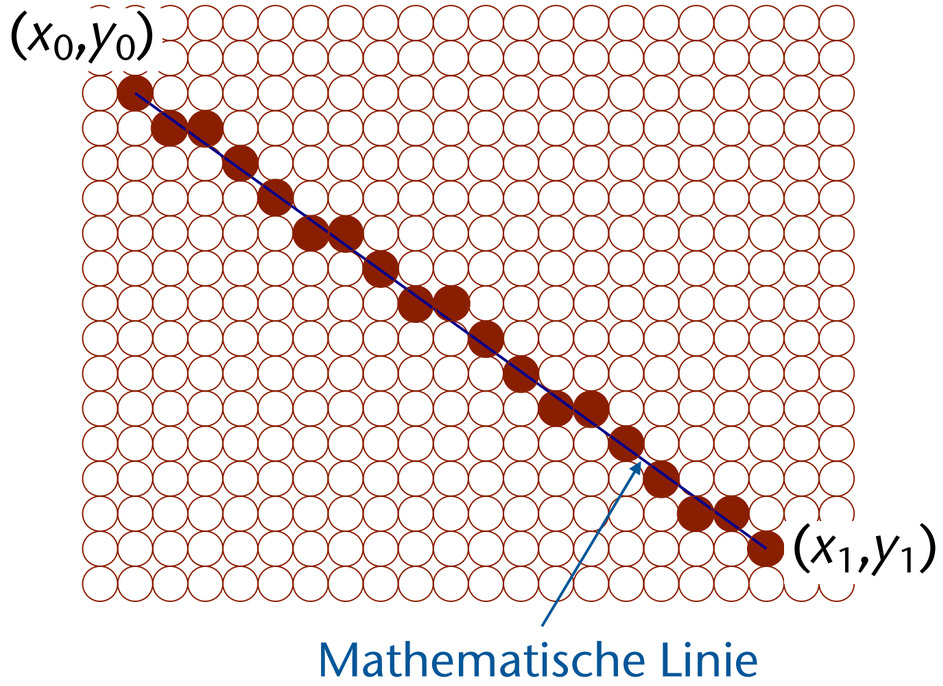
- Der Begriff Scan-conversion oder Rasterisierung bezeichnet allgemein das algorithmische Bestimmen, welche Pixel von dem Primitiv überdeckt werden
  - Der Name kommt von der Scan-Technik der Rasterdisplays
  - Vorgang = Diskretisierung von kontinuierlichen geometrischen Objekten
  - Zusätzliche Aufgabe: Ecken-Werte interpolieren (z.B. Farbe, Tiefenwert, ...)
- Scan-Conversion ist grundlegend für 2D und 3D Computergraphik

Einordnung in die Pipeline



Die Ideale Linie

- Keine Unterbrechungen (diagonale Schritte sind erlaubt)
- Minimalität (setze nur die "nähesten" Pixel an der idealen Linie)
- Einheitliche Stärke und Helligkeit
- Performanz (wenig FLOPs pro Pixel)
- Invarianz gegenüber Zeichenrichtung

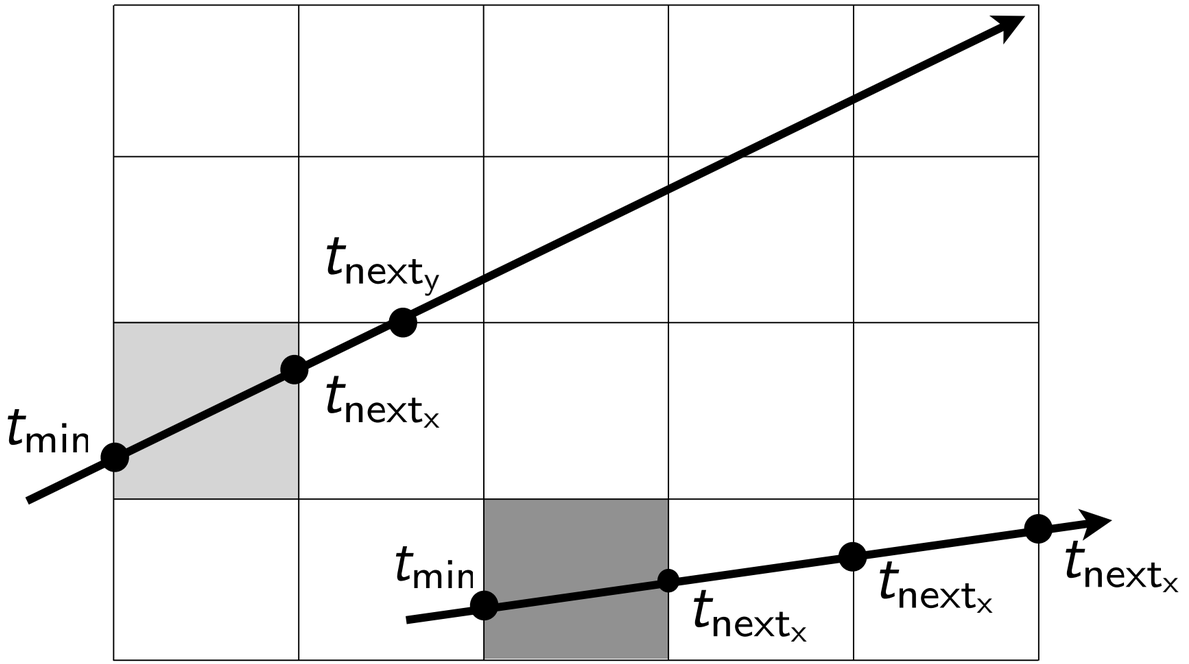


Ein einfacher, inkrementeller Algorithmus

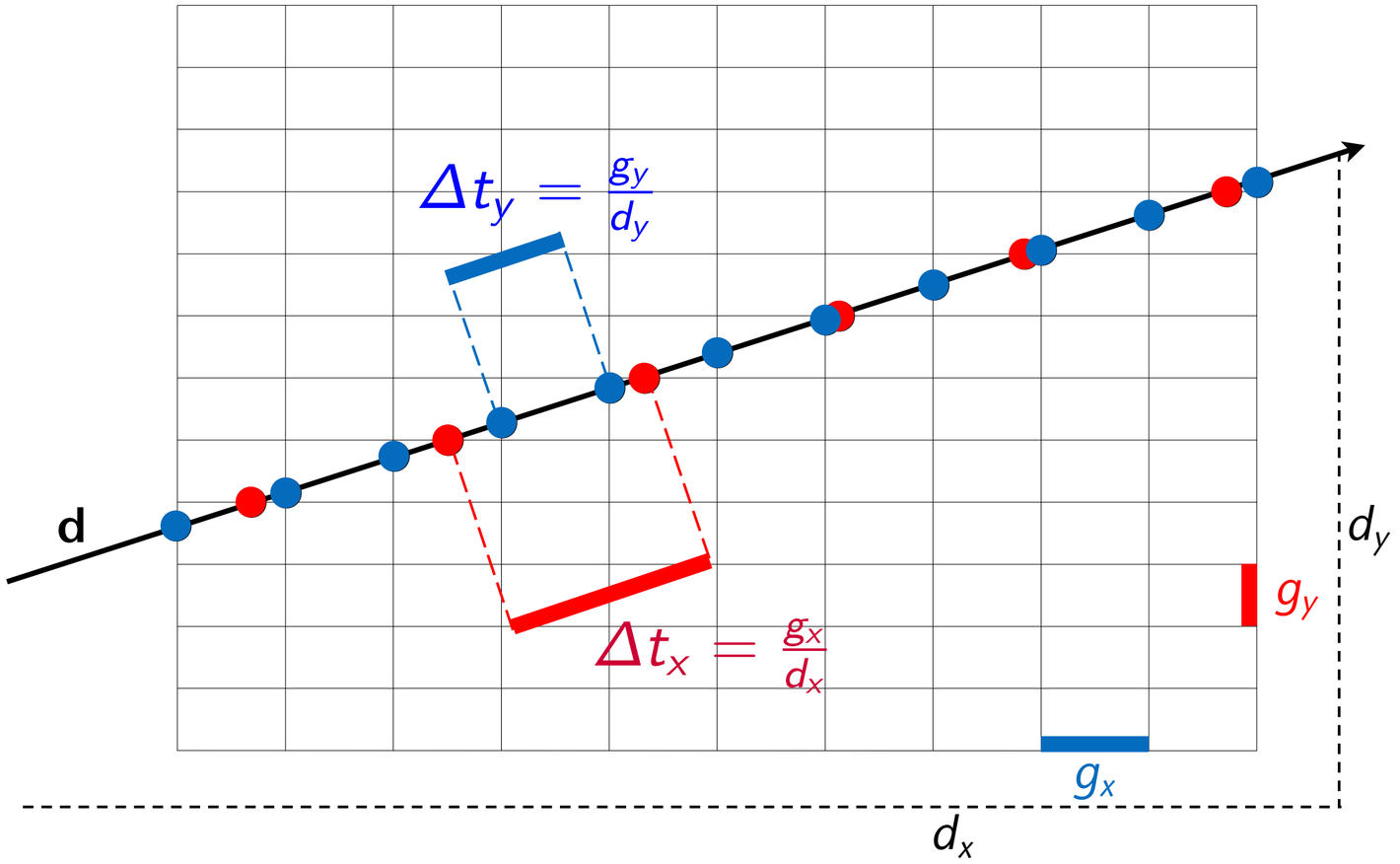
- Ansatz:
  - Verwende Parameterform der Linie

$$P(t) = P_0 + t\left(P_1 - P_0\right)$$

  - Berechne Folge von Linienparametern t, an denen die Linie eine senkrechte (x) oder horizontale (y) Gitterlinie schneidet
- Vereinfachung: erster Linienparameter t_{min} sei gegeben
  - Caveat: Startpunkt liegt normalerweise innerhalb eines der Pixel

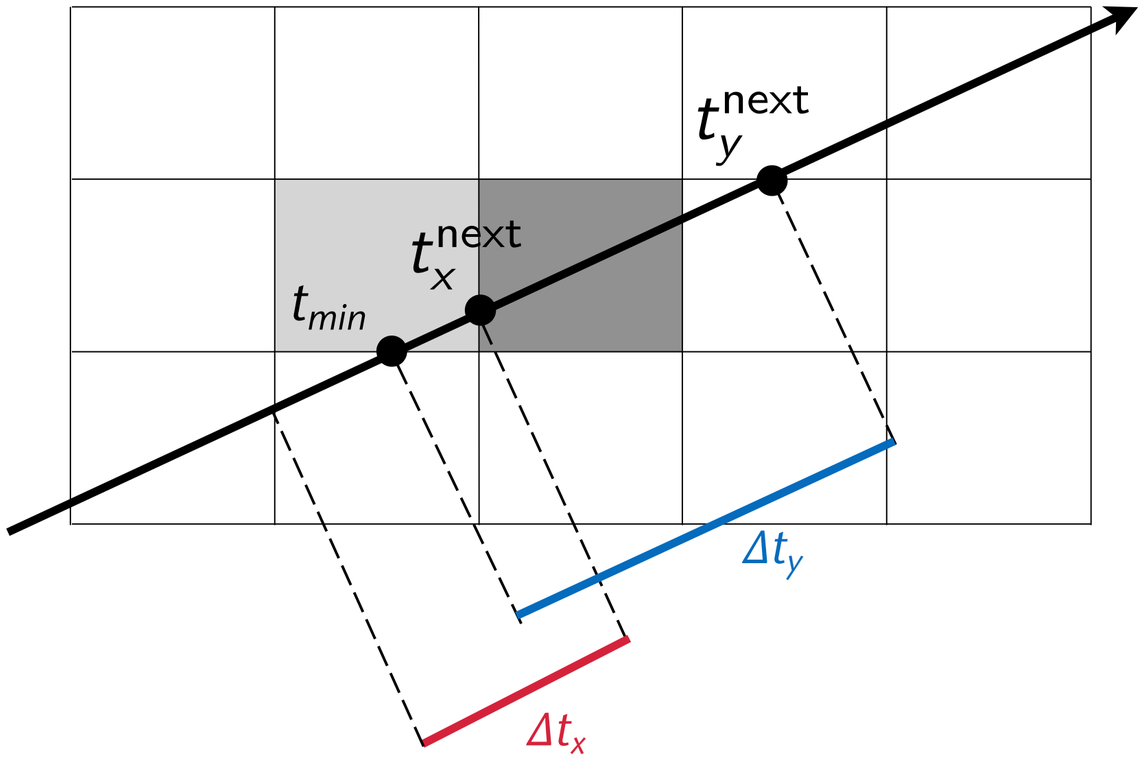


- Gibt es ein Muster bei den Übergängen?
- Betrachte nur die Schnitte mit den x-Gitterlinien ⟶ scheinbar selber Abstand aller dieser Schnittpunkte (*t*'s)
- Analog Schnitte mit den y-Gitterlinien

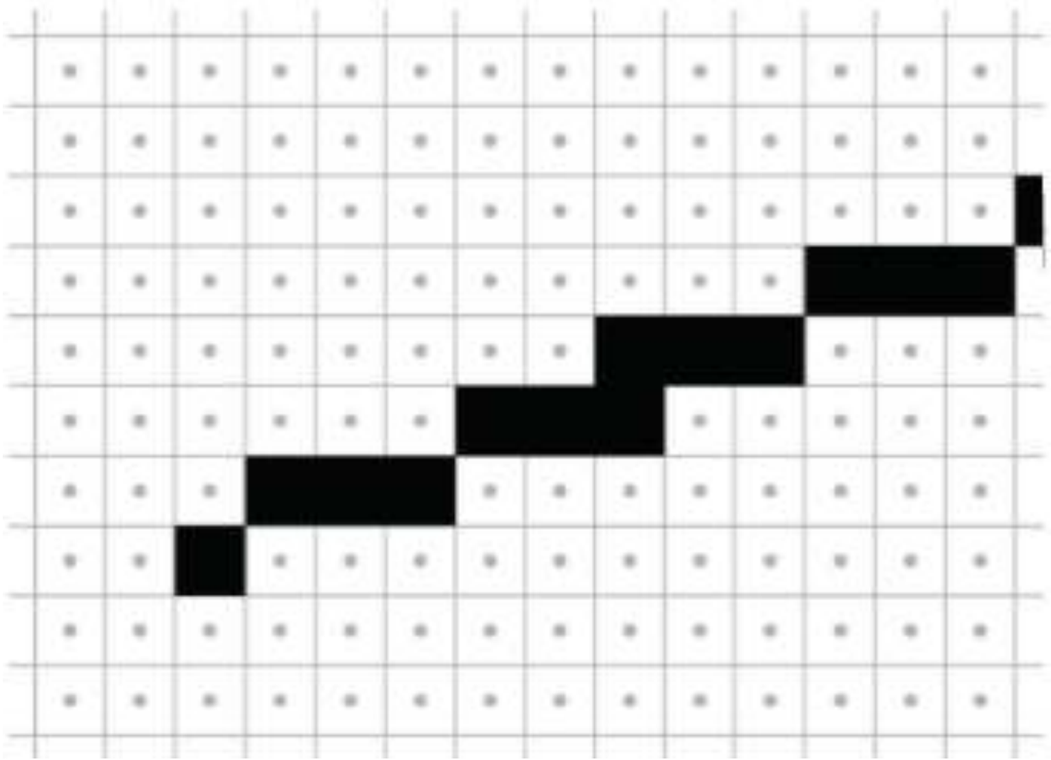


Ein inkrementeller Algorithmus

```
init tmin = 0
calc first tnext_x and tnext_y
init dtx and dty
init pixel coords [x,y] for P0
while tmin < 1.0 :
  buffer[x,y] = color
  if tnext_x < tnext_y :
    x += 1
    tmin = tnext_x
    tnext_x += dtx
  else:
    y += 1
    tmin = tnext_y
    tnext_y += dty
```



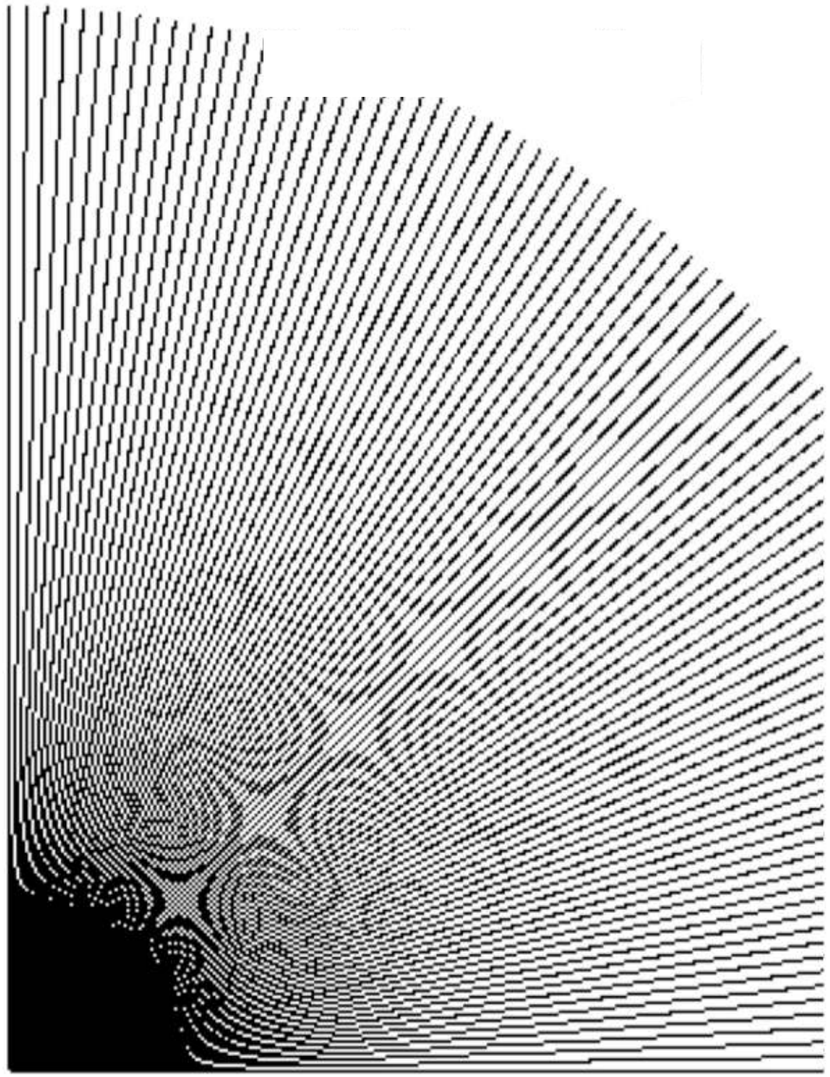
Einer der Nachteile des Algorithmus

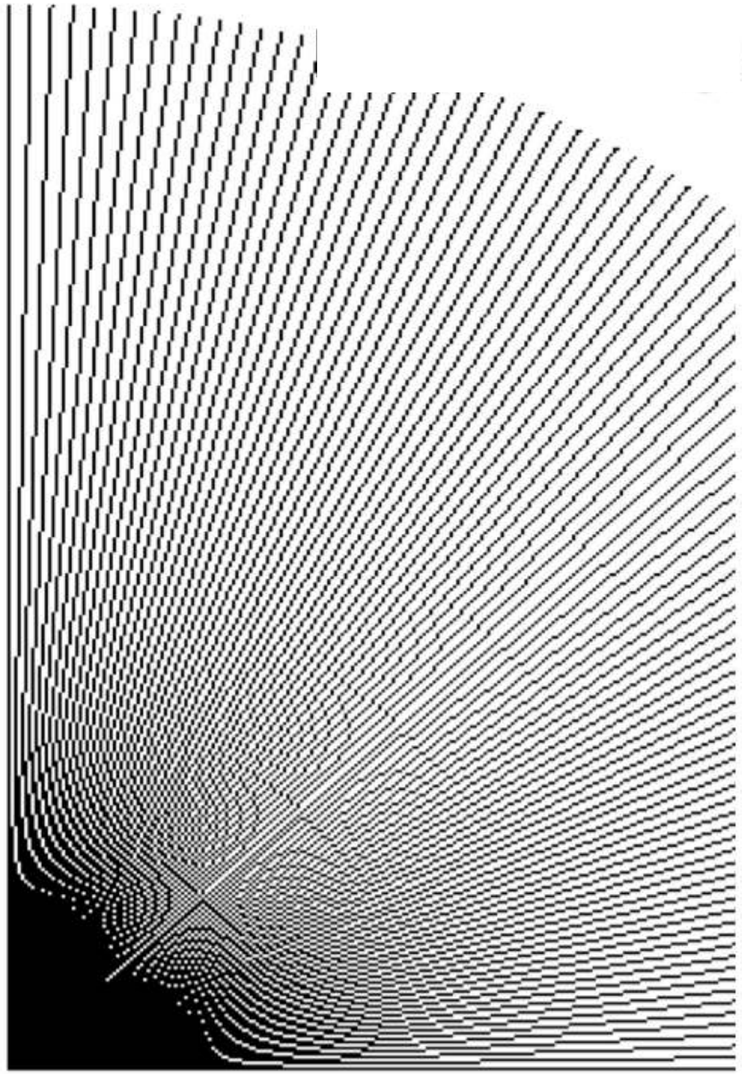


Manchmal werden vertikal übereinander liegende Pixel gesetzt ⟶ unterschiedliche scheinbare Linienstärke

Zweite Konsequenz des Problems: Moireé Patterns

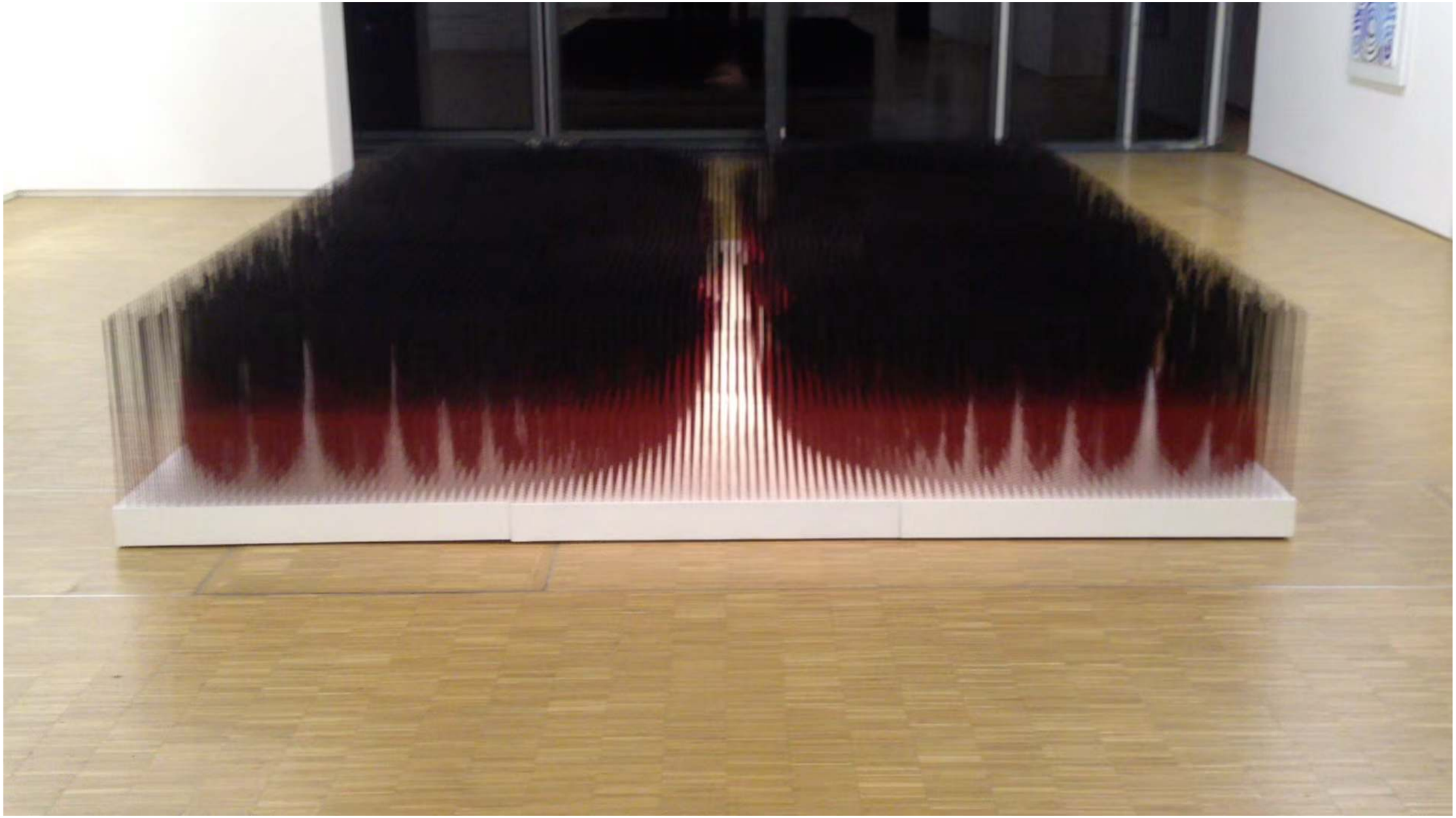
Aussehen mit unserem Algorithmus





Eher gewünschtes Aussehen

Moireé-Effekt in der Kunst



Centre
George
Pompidou

Komplexität der Rasterisierung von Linien

- Anzahl Operationen:

$$O(2 \cdot l + c) = O(l)$$

  l = Länge der Linie in Pixel, c = Kontante für Setup

- Geht es schneller?
- Ja: Algorithmen, die nur Integer-Operationen enthalten!
- Noch schneller: Span-basierter Algorithms [Henning & Stephenson, 2004]

$$O\left(\frac{l}{r}\right)$$

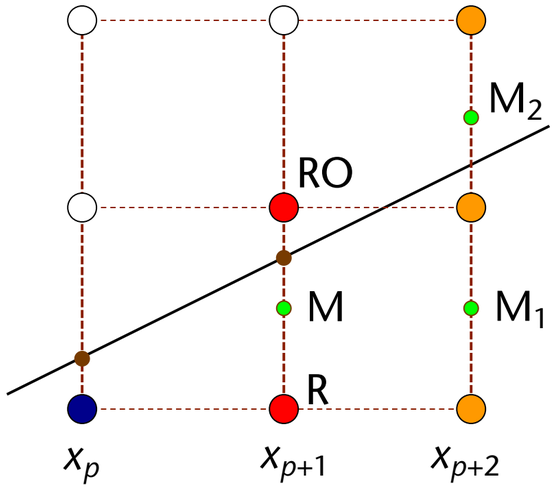
  n = Anzahl Zellen auf dem Strahl, r = mittlere Span-Länge

  - Im Mittel: ca. Faktor 2 schneller, gemittelt über alle mögliche Orientierungen

Noch bessere Algorithmen (?)

- Es gibt Algorithmen mit reiner Integer-Arithmetik, sind auch inkrementell, und nur 1 arithmetische Integer-Operation pro Iteration!
- Ansatz:
  - Berechne **vorzeichenbehaftete** Abstände der Gitterpunkte von der Linie
  - Aktueller Gitterpunkt liegt oberhalb ⟶ gehe nach rechts im Gitter; aktueller Gitterpunkt unterhalb ⟶ gehe nach recht oben
  - Bresenham: Gitterpunkte "zwischen" Pixeln
  - Midpoint-Algo: Mittelpunkte der Pixel (einfacher)
- Wirklich schneller?

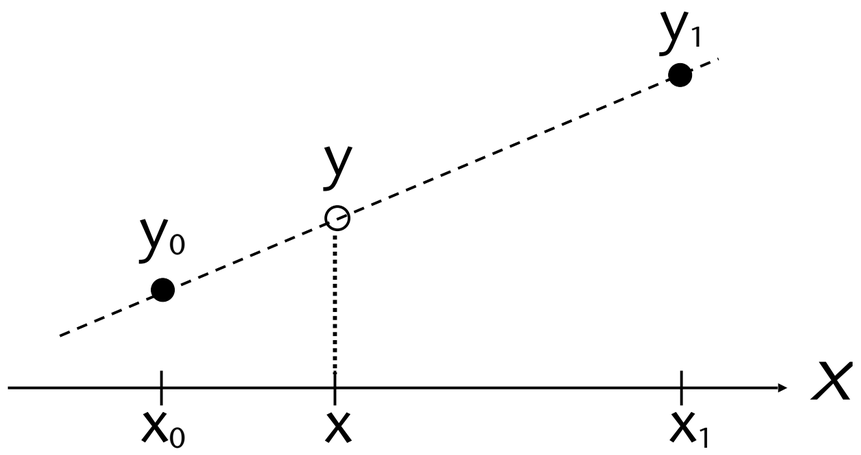
Clip from Bresenham's Keynote Talk at WSCG 2003

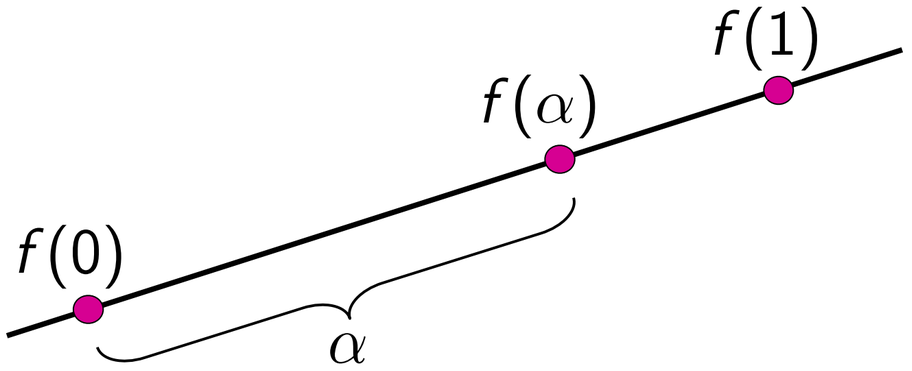


Interpolation von Attributen

- Häufig haben Eckpunkte weitere Attribute (außer der Position)
  - Z.B. verschiedene Farben
- Ziel: ein gleichmäßiger Farbverlauf entlang der Linie
- Idee: lineare Interpolation
- Im 1D: $y = f(x) = (1 - \alpha)y_0 + \alpha y_1$

  mit $\alpha = (x - x_0)/(x_1 - x_0)$
- Im 2D ist α gerade die normierte(!) Distanz zwischen (x, y) und (x_0, y_0)





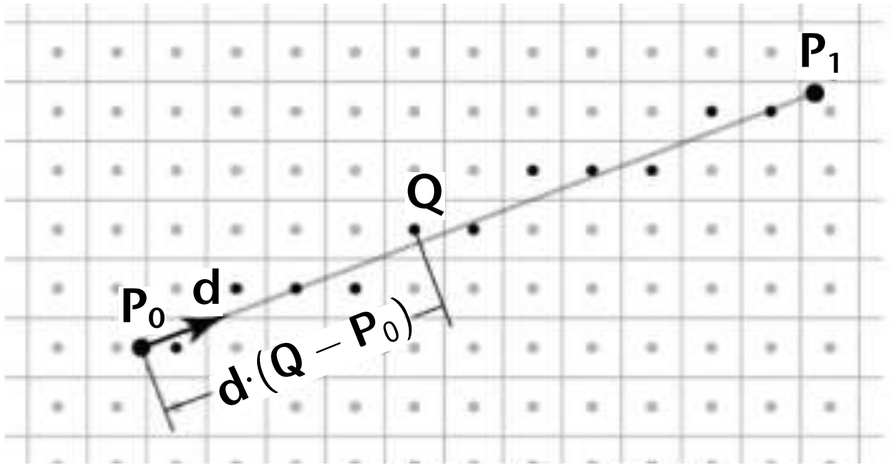
- Problem: Pixel Q liegen i.A. *nicht* genau auf der Linie
- Definiere Funktion zur Projektion *auf* die Linie:

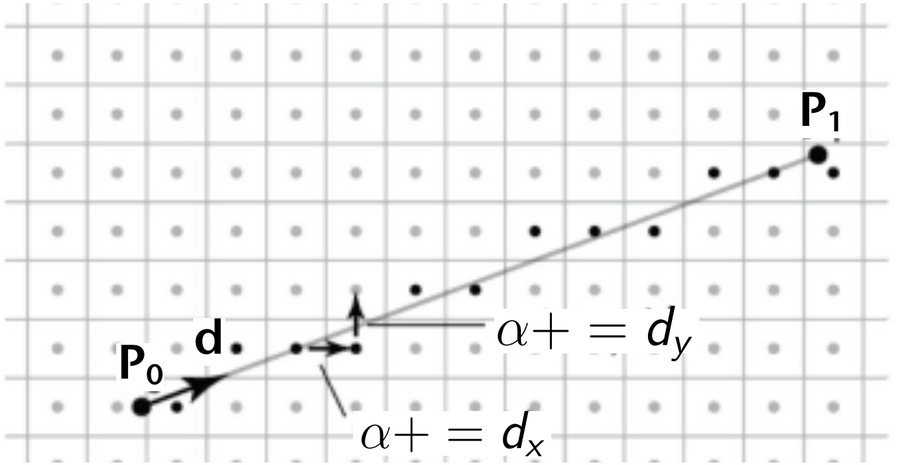
$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0}{\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\|} \qquad \alpha = \frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{P}_0)}{\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\|}$$

$$f(\alpha) = (1-\alpha)\begin{pmatrix} r_0 \\ g_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} r_1 \\ g_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

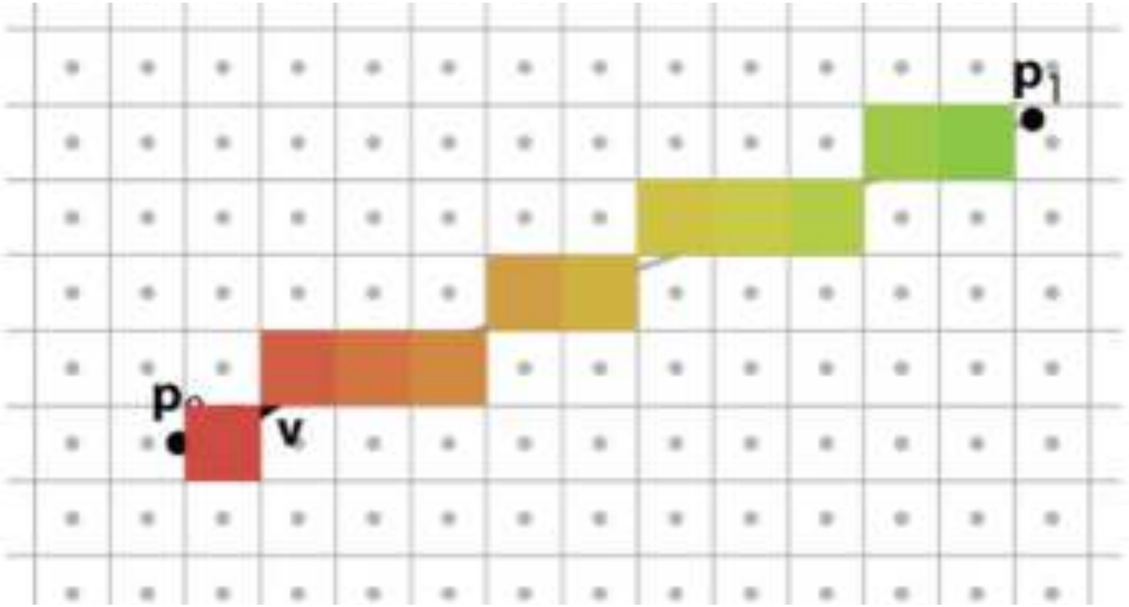
- Beobachtung: *f* ist *linear* in Q_x und Q_y

➢ Verwende inkrementelle Berechnung von *f*





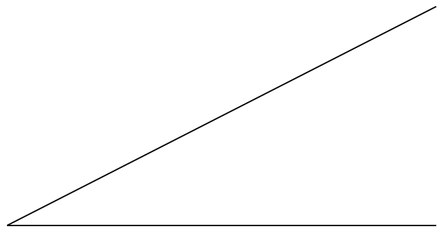
Resultat

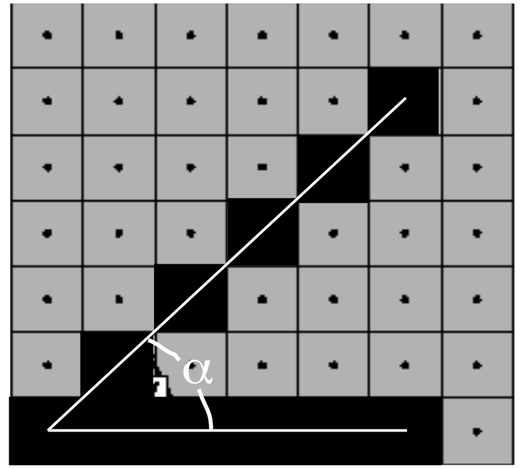


Weitere Überlegungen

- Gewünscht: einheitliche Stärke und Helligkeit
- Bei gleicher Pixelzahl sind schräge Linien länger als horizontale
- Ändere Intensität der Linie gemäß der Steigung
- Skaliere den Grauwert um den Faktor

$$\cos(45^\circ - \alpha)\,, \quad \alpha = 0^\circ \ldots 45^\circ$$



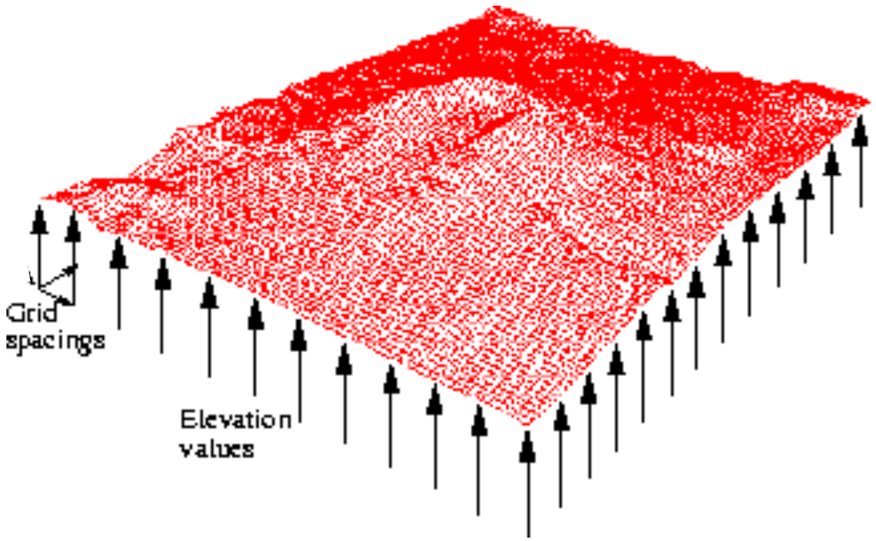


Ray-Tracing Height Fields

- Height Field = alle Arten von Flächen, die sich als eine Funktion

$$z = f(x, y)$$

  schreiben lassen
  - Z.B.: Terrain, Meßwerte über einer Ebene, 2D-Skalarfeld, Reliefs, ...

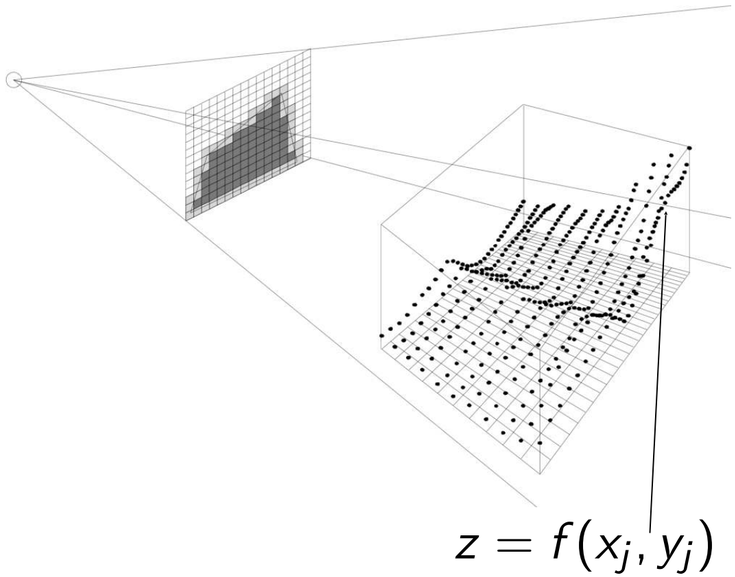


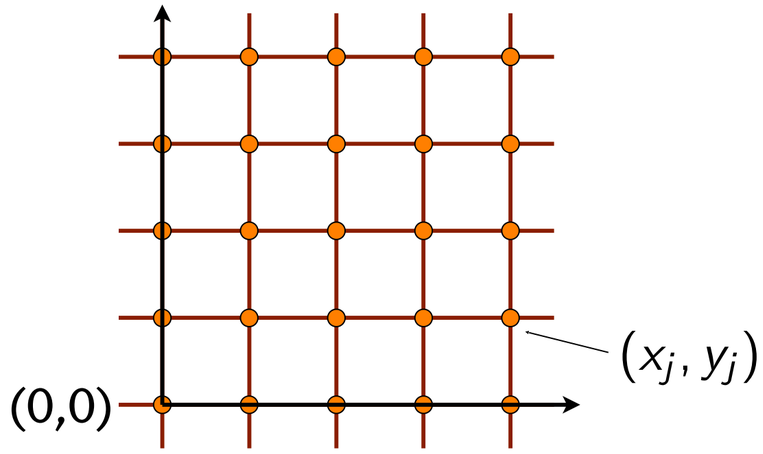
Height field (= Bitmap)

Rendered

Situation

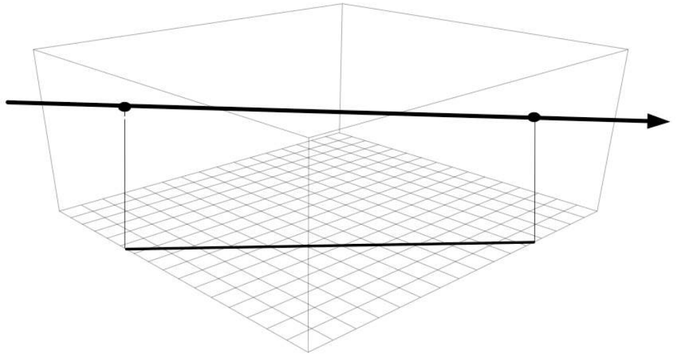
- Die naive Methode, ein Height-Field zu raytracen:
  - Konvertiere das $n \times n$ Feld in $2n^2$ Dreiecke, teste Strahl gegen jedes davon
  - Probleme: langsam, benötigt viel Speicher
- Ziel: direktes Ray-Tracing des Height-Fields aus dem 2D-Array
- Gegeben:
  - Strahl in 3D
  - Gitter [0...n]×[0...n] als Float-Array
  - Höhenwerte liegen auf den Gitterknoten vor



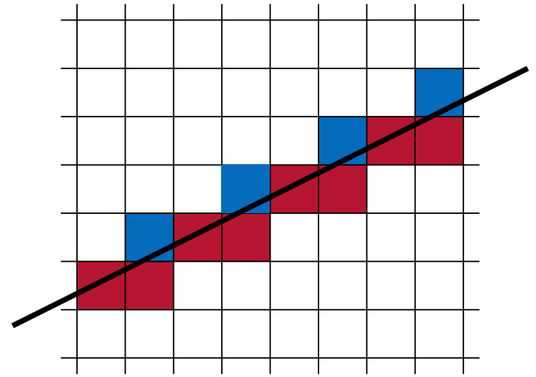


Das Verfahren

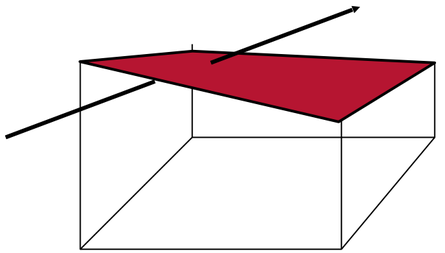
1. Dimensionsreduktion
   - Projiziere Strahl in xy-Ebene



2. Alle Zellen der Reihe nach besuchen, die vom Strahl geschnitten werden (und nur diese)
   - Wie Scan-Conversion von Linien, hier auch mit den "blauen" Zellen

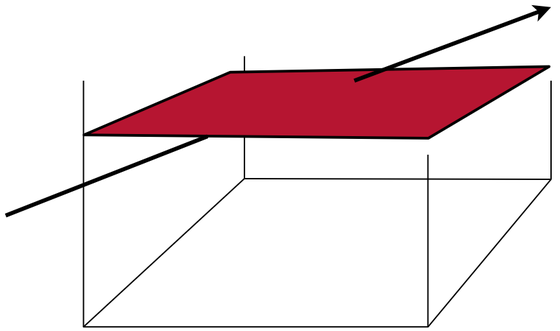


3. Strahl testen gegen das Flächenstück, das von den 4 Höhenwerten an den Ecken aufgespannt wird

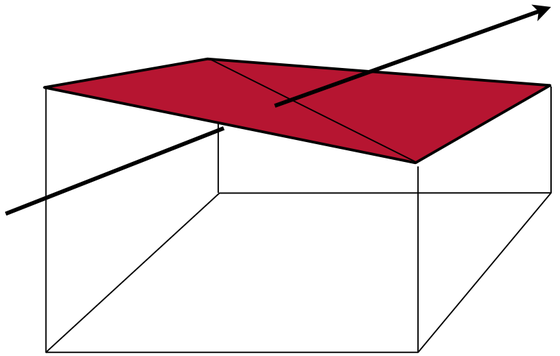


Schnittest Strahl — Flächenstück in der Zelle

- Naive Methode "piecewise constant heighfield":
  - Bestimme die mittlere Höhe aus den 4 Höhenwerten an den Ecken
  - Schneide Strahl gegen horizontales Quadrat mit dieser mittleren Höhe
  - Sehr ungenau



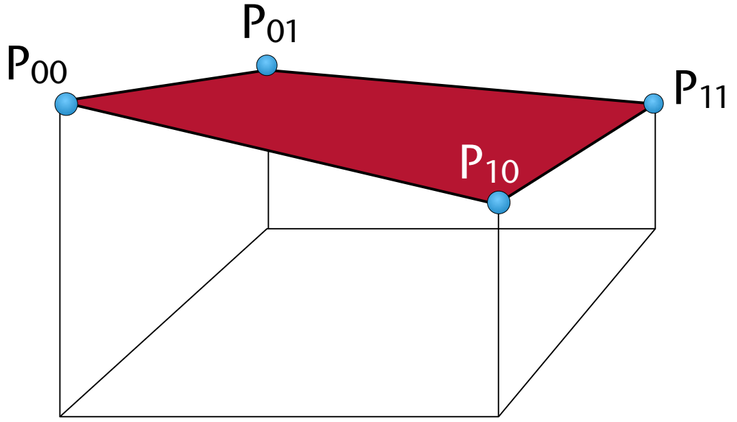
- Naive Methode "2 Dreiecke":
  - Konstruiere 2 Dreiecke aus den 4 Punkten über den Ecken
  - Knick innerhalb der Zelle
  - Aufteilung in Dreiecke nicht eindeutig

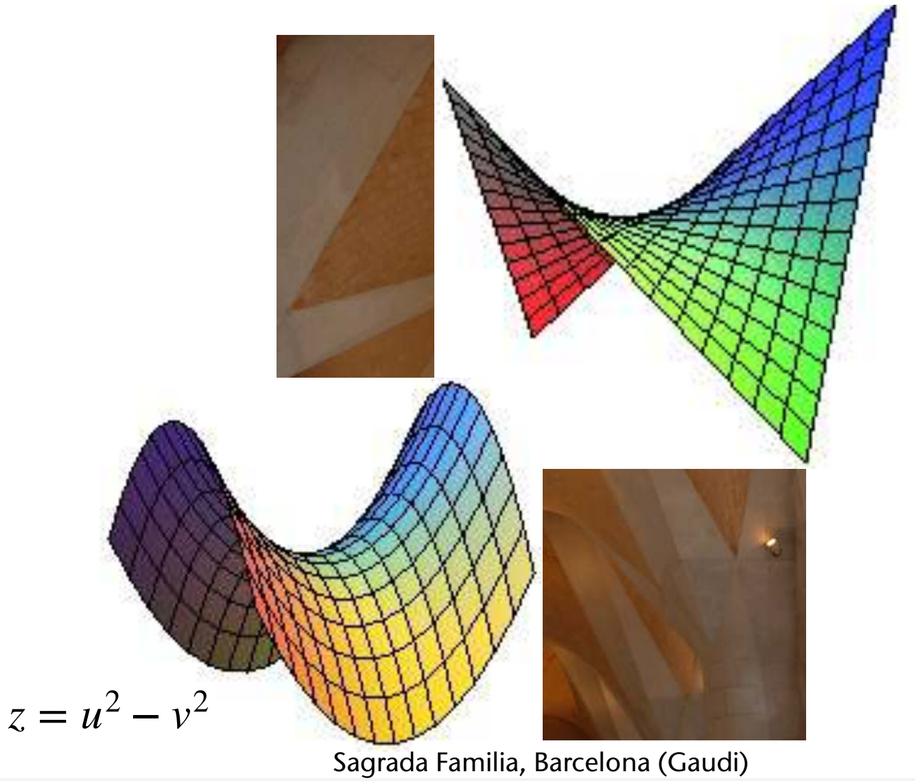


Bilineare Interpolation

- Betrachte Fläche, die entsteht, wenn man eine Gerade durch die Punkte P_{00} und P_{01} legt, und dann auf beiden Seiten gleichzeitig Richtung P_{10} und P_{11} gleiten lässt
  - Konstruktion heißt "Regelfläche" (*ruled surface*)
  - Bezeichnung: parabolisches Hyberboloid
- O.B.d.A. $P_{00} = (0, 0, h_{00})$, $P_{10} = (1, 0, h_{10})$, etc.
- Gleichung der Fläche:

$$h(u,v) = (1-v)\left[(1-u)\cdot h_{00} + u\cdot h_{10}\right] + v\ \left[(1-u)\cdot h_{01} + u\cdot h_{11}\right]$$





Sagrada Familia, Barcelona (Gaudi)

Lösung mit bilinearer Interpolation

$$Q(t) = Q + t \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

Bei bestimmtem t hat die Linie die (u,v)-Koord $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x + t\, r_x \\ q_y + t\, r_y \end{pmatrix}$ erreicht, und die "Höhe" $z(t) = q_z + t\, r_z$.

Gesucht ist t^*, bei dem

$$z(t^*) = h\big(u(t^*),\ v(t^*)\big) \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow$

Bilinear: $h(u,v)$ umformen

In (1) einsetzen:

$$\begin{aligned} q_z + t\, r_z &= h\big(q_x + t\, r_x,\ q_y + t\, r_y\big) \\ &= h_{00} + (q_x + t\, r_x)\, h_u + (q_y + t\, r_y)\, h_v \\ &\quad + (q_x + t\, r_x)(q_y + t\, r_y)\, h_{uv} \\ &= h_{uv}\, r_x\, r_y\, t^2 + (\dots)\cdot t + (\dots) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ quadratische Gleichung in t $\Rightarrow$ $t_{1/2}$

Fälle: keine Lsg

$t_1 = t_2$ $\Rightarrow$ (Tangente)

$t_1 < t_2 < 0$ $\Rightarrow$ (o.B.d.A. $t_1 < t_2$, Schn.pkt vor Q)

$t_1 < 0 < t_2$ $\Rightarrow$ (Schnpkt $Q(t_2)$), $t^* = t_2$

$0 < t_1 < t_2$ $\Rightarrow$ Schn.pkt $Q(t_1)$, $t^* = t_1$

$\big(u(t^*),\ v(t^*)\big) \notin [0,1]^2$ $\Rightarrow$ Schn.pkt außerhalb der Quadrate

Bilinear:

$$\begin{aligned} &(1-v)\big\{h_{00} + u(h_{10} - h_{00})\big\} + \\ &\quad v\big\{h_{01} + u(h_{11} - h_{01})\big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1\cdot\big[h_{00} + u(h_{10} - h_{00})\big] + \\ &\quad v\cdot\Big(\big[h_{01} + u(h_{11} - h_{01})\big] - \big[h_{00} + u(h_{10} - h_{00})\big]\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= h_{00} + u\,(h_{10} - h_{00}) \\ &\quad + v\,(h_{01} - h_{00}) + u\cdot v\cdot\big[(h_{11} - h_{01}) - (h_{10} - h_{00})\big] \end{aligned}$$

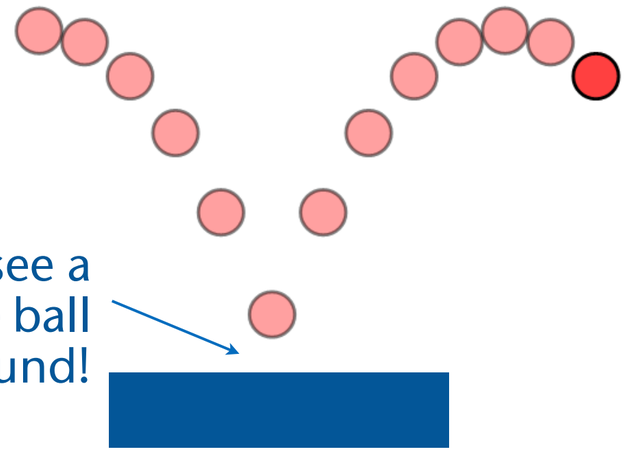
$$= h_{00} + u\, h_u + v\, h_v + u\cdot v\cdot h_{uv}$$

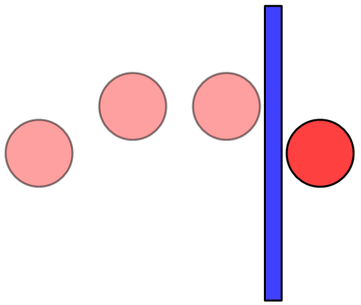
Valles Marineris, Mars - http://mars.jpl.nasa.gov

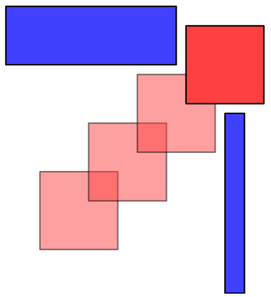
Anwendungsfall: Continuous Collision Detection

[Xu, Barbic 2014]

- Probleme diskreter Collision Detection:
  - Diskretisierung der Zeit
  - Tunneling
- Problemstellung bei CCD:
  - Gegeben zwei Objekte A, B, bewegt durch eine Simulation
  - Annahme: zum Zeitpunkt t_1 sind $A(t_1)$, $B(t_1)$ kollisionsfrei
  - Bestimme, ob im Zeitintervall $[t_1,t_2]$ eine Kollision vorliegt und, falls ja, den frühesten Zeitpunkt $t \in [t_1, t_2]$, zu dem sie sich gerade "berühren"
- Limits für min. Objekt-Größe, max. Geschwindigkeit und min. Framerate helfen nur bedingt

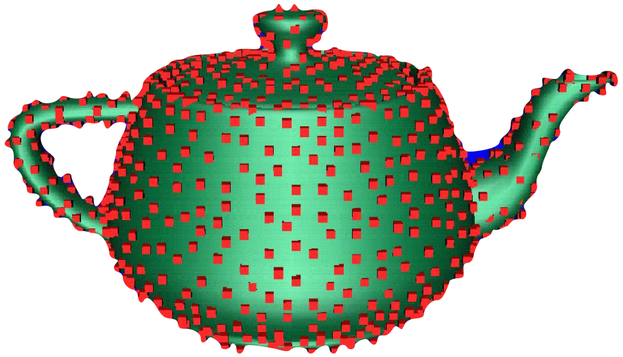


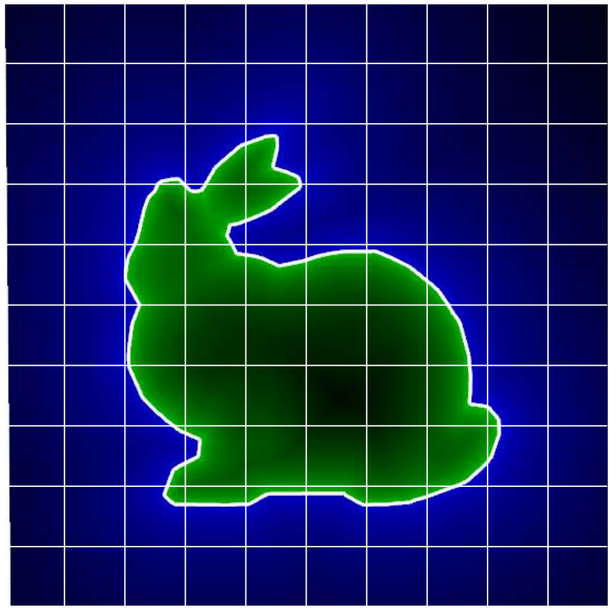




Das Voxmap-Pointshell-Verfahren

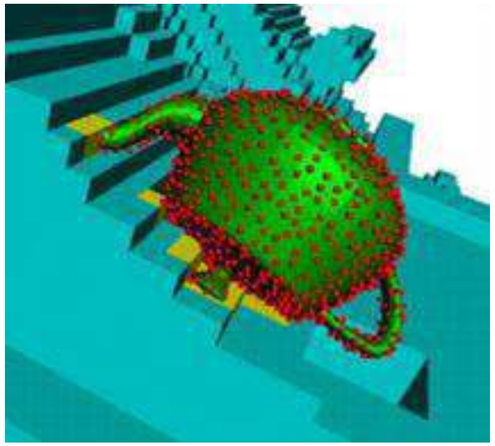
- Eine Lösung für Collision Detection
- Pointshell = Sampling der Oberfläche mit Points
- Voxmap:
  - 3D Gitter für die statische Szene, Zelle = "Voxel"
  - Einfachster Fall: 1 = innerhalb, 0 außerhalb
  - Besser: signed distance field = Gitterknoten (nicht Mittelpunkte!) speichern Distanz von Gitter-Punkt zu nähestem Punkt auf Oberfläche, positiv/negativ = außerhalb/innerhalb





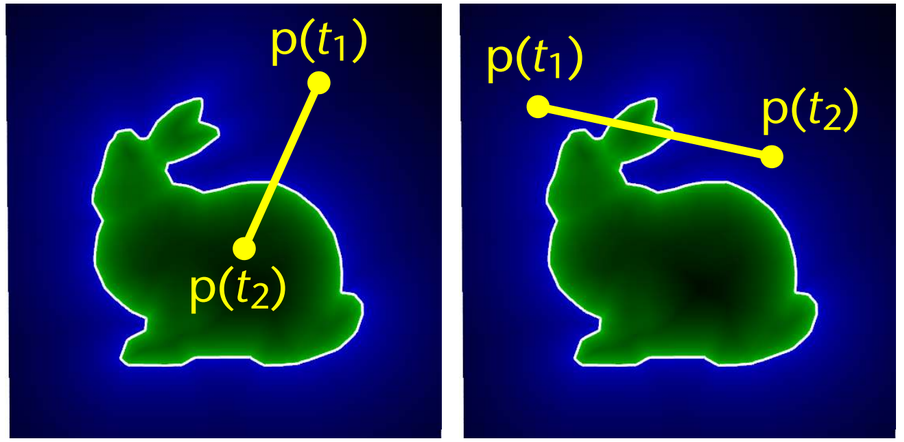
- Discrete collision detection:

```
for all points p in A:
  check voxel(p) in B
```



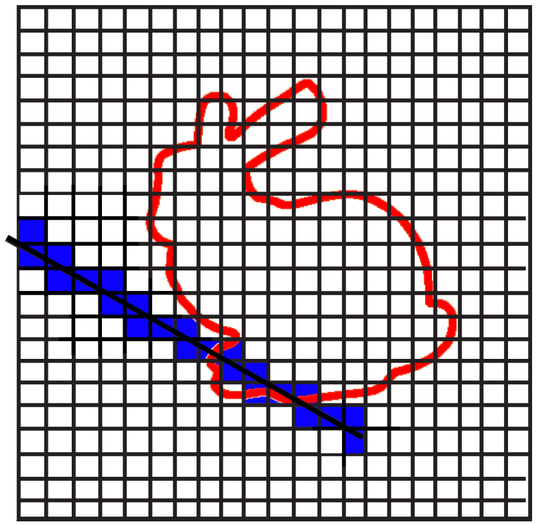
- Continuous collision detection ⟶ test line segments

```
for all points p in A:
  check whether line segment [p(t1),p(t2)]
  goes from pos. to neg. distance
  somewhere in-between
```



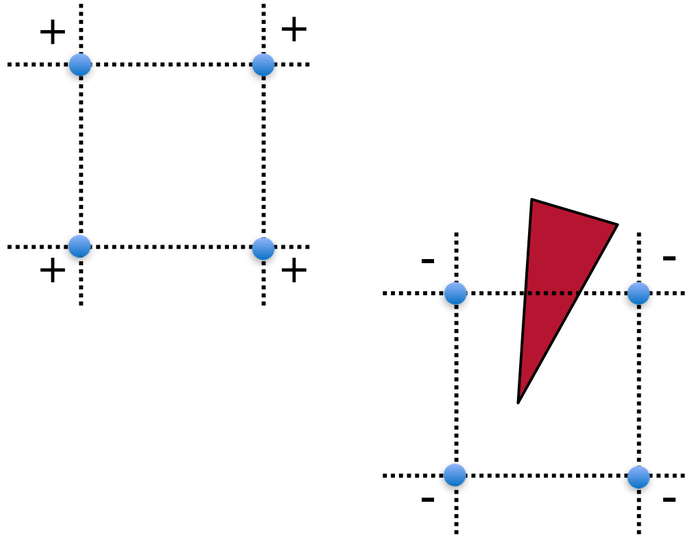
- Caveat: es genügt nicht, die Voxel p(t_1) und p(t_2) zu testen!

- Verfahren:
  1. Besuche alle Voxel, die vom Liniensegment getroffen werden
  2. In jedem Voxel: teste auf Null-Durchgang



- Zu 1:
  - Einfache Erweiterung des Linien-Scanline-Algorithmus' auf 3D Gitter
  - Berechne Folge von *t*'s für Schnitte mit xy- , xz-, und yz-Ebene
  - Mache Schritt zu Nachbarzelle mit "nächstem" *t*

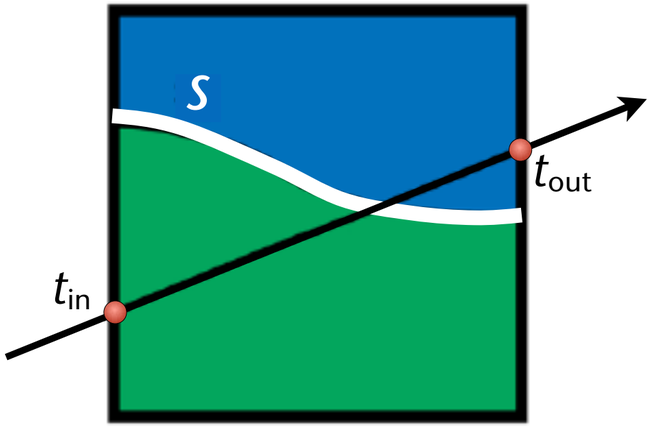
- Zu 2:
  - Erstes Ausschlusskriterium: alle Voxel-Ecken sind positiv, oder alle Ecken negativ
    - Verpasst zwar Details – die aber im Distanzfeld schon verloren gegangen sind



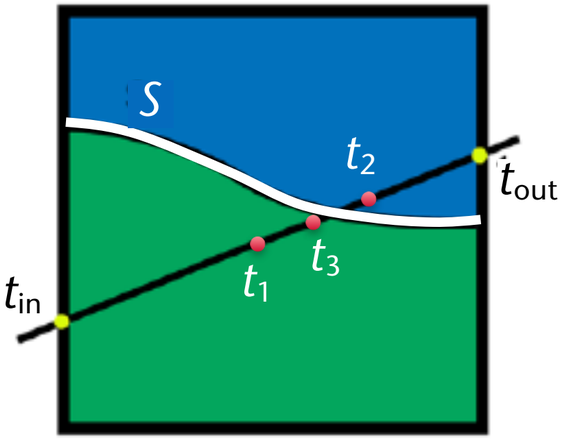
  - Zweites Ausschlusskriterium:

$$\text{sign}(\, P(t_{\text{in}})\,) = \text{sign}(\, P(t_{\text{out}})\,) \;\Rightarrow\; \text{no intersection}$$

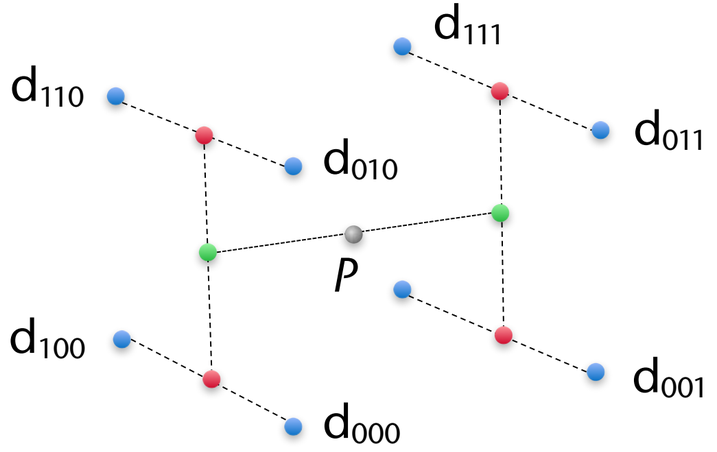
    - Verpasst weitere "ungünstige" Fälle (welche?)



- Falls beide Vortests passiert wurden ⟶
  Nullstellensuche: gesucht wird t mit $d(\,P(t)\,) = 0$
  - Z.B. mittels Intervall-Halbierung
    - Achtung: kann theoretisch auch einen Null-Durchgang verpassen! (in welchem Fall?)



- Aufgabe: Distanzwerte d(P) für Punkte im Inneren eines Voxels berechnen (z.B. Testpunkte auf der Geraden)
- Lösung: trilineare Interpolation
  - OBdA: Voxel = Einheitswürfel $[0,1]^3$
  - Distanzwerte an den Ecken = d_{abc} , $a,b,c \in \{0,1\}$
  - Gesucht: d_{xyz} = Distanz am Punkt $P = (x\,,\ y\,,\ z)^T$



Bemerkungen

- Die Funktion $d(P(t))$ ist ein Polynom vom Grad 3 $\longrightarrow$ löse mit analytischer Formel
- Wir haben hier – als Nebenprodukt – eine Fläche S "implizit" definiert:

$$S = \{X \mid F(X) = 0\}$$

  - Solche Flächen heißen oft implizite Flächen, oder Iso-Surfaces