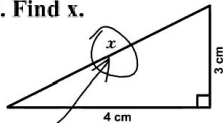




Computergraphik

Kurze Wiederholung in Geometrie

3. Find x .



Here it is

G. Zachmann
University of Bremen, Germany
cgvr.cs.uni-bremen.de



- Notation: in dieser VL schreiben wir Vektoren mit kleinen fetten Buchstaben:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

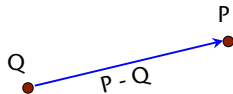
- Betrag / Länge:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a$$

- Beweis:

Unterschied zwischen Punkten und Vektoren

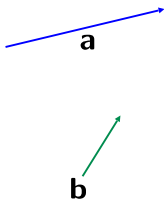
- Notation: Punkte mit normalen Großbuchstaben
- Achtung: **Punkt** $\neq$ **Vektor** !
- Unterschiedliche Bedeutung:
 - Punkt = Ort im Raum
 - Vektor = Richtung + Länge = Verschiebungsoperator (wirkt auf Punkte)
- Merksregeln:
 - Punkt + Vektor = Punkt
 - Vektor + Vektor = Vektor
 - Punkt - Punkt = Vektor (Notation: $\overline{QP}$)
 - Punkt + Punkt = **Nonsense!**
 - Korrespondenz zwischen Punkt und Vektor mittels Ursprungspunkt O :



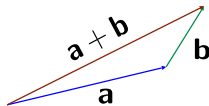
$$\mathbf{p} = P - O \quad P = O + \mathbf{p}$$

$\mathbf{p}$ heißt **Ortsvektor**

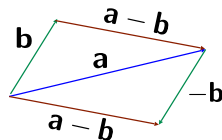
- Geometrische Interpretation der Vektor-Addition und Vektor-Subtraktion:



Addition



Subtraktion



Terminologie

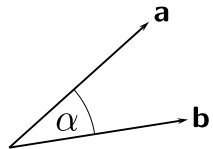
- **Orthogonal** = senkrecht zueinander
- Drei Vektoren sind **koplanar** $\Leftrightarrow$
es gibt eine Ebene, die alle drei Vektoren enthält

Das Skalarprodukt (*dot product*)

- Definition: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

- Eine geometrische Bedeutung:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$$



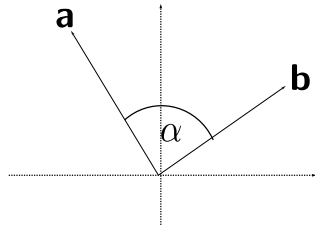
- Beweis (2D):

- Sei θ_a = Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und x-Achse

- Damit ist $\cos \alpha = \cos(\theta_a - \theta_b)$

$$= \cos \theta_a \cos \theta_b + \sin \theta_a \sin \theta_b$$

$$= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} \frac{b_x}{|\mathbf{b}|} + \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} \frac{b_y}{|\mathbf{b}|}$$



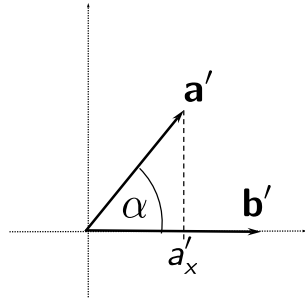
- Alternativer Beweis (n -dimensional):

- Verbinde $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ starr miteinander
- Rotiere beide so, dass $\mathbf{b}$ auf der x -Achse zu liegen kommt $\rightarrow \mathbf{b}'$,
und $\mathbf{a}$ irgendwo in der xy -Ebene $\rightarrow \mathbf{a}'$
(der Winkel α zwischen beiden bleibt unverändert)
- Damit ist $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{a}^T I \mathbf{b} = \mathbf{a}^T R^{-1} R \mathbf{b}$

$$= (\mathbf{a}^T R^T)(R \mathbf{b}) = (R \mathbf{a})^T (R \mathbf{b}) = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}'$$

$$= \begin{pmatrix} a'_x & a'_y & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b'_x & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

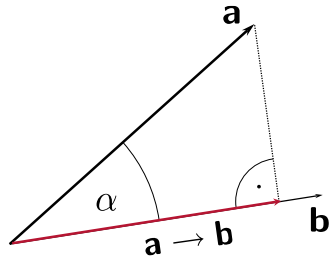
$$= a'_x \cdot b'_x = |\mathbf{a}'| \cos \alpha \cdot |\mathbf{b}'| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \alpha$$



Weitere geometrische Bedeutung des Skalarproduktes

- Die senkrechte Projektion:

$$|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$



- Mit anderen Worten: das Skalarprodukt mit einem Einheitsvektor lässt sich als senkrechte Projektion auf diesen Einheitsvektor interpretieren;

d.h., falls $|\mathbf{e}| = 1$

dann ist $|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{e}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}$

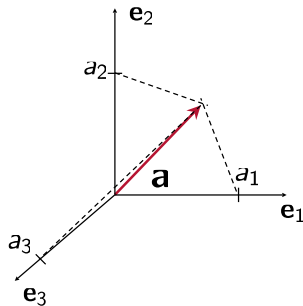
Darstellung eines Vektors bzgl. einer orthogonalen Basis

- Wähle eine Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
- Berechne die Projektionen von $\mathbf{a}$ auf die Achsen:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 =: a_1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 =: a_2$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 =: a_3$$

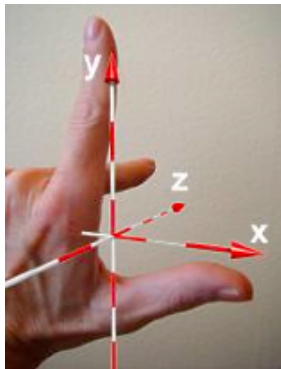


- Rückgewinnung von $\mathbf{a}$ aus den Koordinaten (a_1, a_2, a_3) :

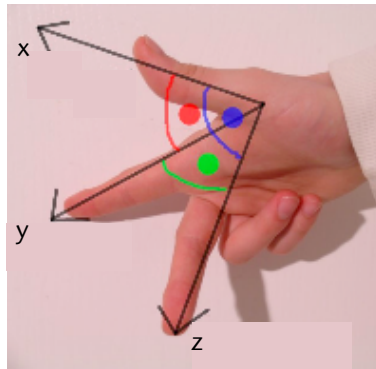
$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Eine Konvention bei 3D-Koordinatensystemen

Left handed
system
(Linkssystem)



Right handed
system
(Rechtssystem)

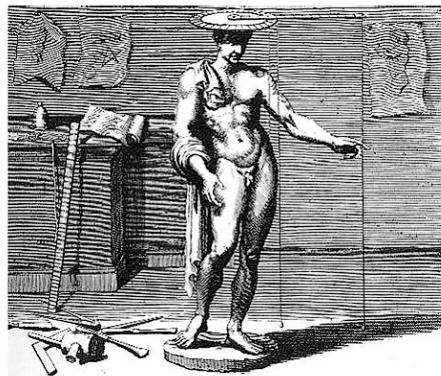


Achtung: wir verwenden *immer* das rechtshändige Koordinatensystem! (außer, es steht etwas anderes da)

Das erste (?) Koordinatensystem



Alberti hat um 1450 Polarkoordinaten beschrieben und eine Karte von Rom in Form einer Tabelle der wichtigen Punkten der Stadt in seinem Buch *Descriptio Urbis Romae* veröffentlicht.

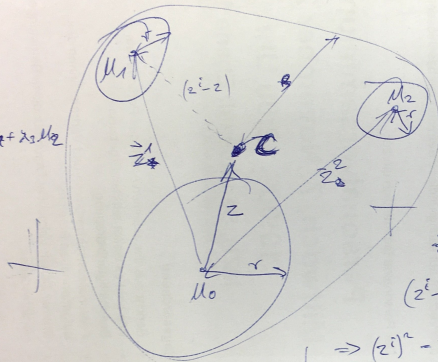


Alberti hat auch Zylinder-Koordinaten beschrieben (in seinem Buch *De Statua*), und eine Vorrichtung, das *finitorium*, mit dem man Statuen "einscannen" und kopieren könnte.

Anwendungsbeispiel: Umkugel um 3 Kugeln berechnen
 alle 3 Kugeln liegen in einer Ebene, alle Radien gleich groß
 (analog geht es für 4 Kugeln)

Alle Radien gleich groß, alle 3 Kugeln in einer Ebene, nicht abgegrenzt

$$C = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$$



$$Q z = \frac{1}{2} e$$

$$z = \frac{1}{2} Q^{-1} e$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 \\ 2y^1 & 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2^1 & 2^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{1}{3}(M_0 + M_1 + M_2)$$

$$(z^i - z)^2 = (s - r)^2, \quad i=1,2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow (z^i)^2 - 2z^i z + z^2 = s^2 - 2sr + r^2, \quad i=1,2$$

$$z^2 = (s - r)^2 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow$$

$$2z^i \cdot z - (z^i)^2 = 0$$

$$2z^i \cdot z = (z^i)^2, \quad i=1,2$$

Ungleichungen

- Dreiecksungleichung:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

- Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$$

Das Kreuzprodukt (*cross product*)

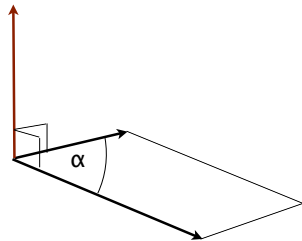
- Definition in 3D:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

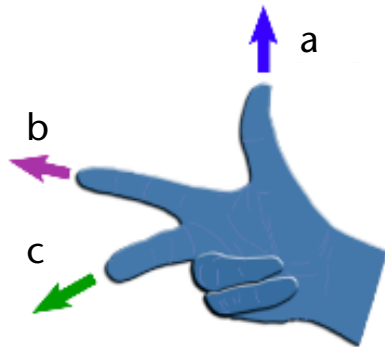
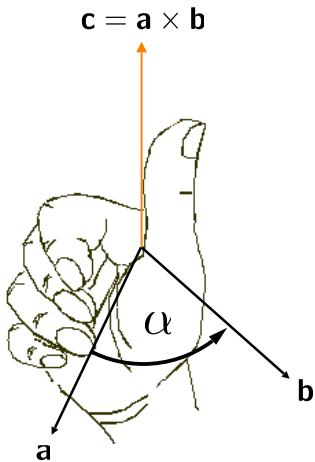
- Ergebnis ist ein Vektor, der senkrecht auf beiden Vektoren steht
- Länge des Vektors = Flächeninhalt des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

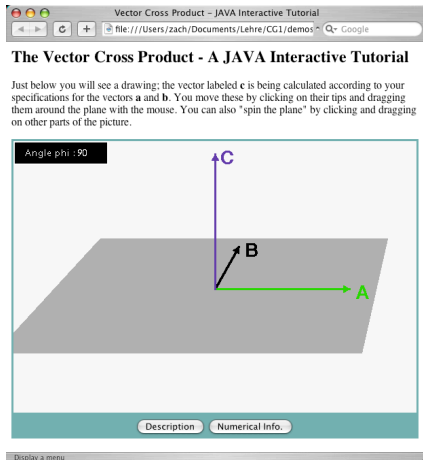
$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$$

- Nützlich zur Erstellung von Koordinatensystemen (dazu später mehr)



- Eselsbrücke: **Rechte-Hand-Regeln**





<http://www.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html>

Konstruktion eines Koordinatensystems

- Häufige Aufgabe:
 - Ein Vektor $\mathbf{a}$ ist gegeben (z.B. Blickrichtung)
 - Erstelle dazu eine Orthonormalbasis
- Nicht eindeutig, aber oft genügt *irgendeine* Orthonormalbasis
- Algorithmus:
 1. Setze $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$
 2. Für $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ benötigen wir irgend einen Vektor $\mathbf{t}$, der nicht kollinear zu $\mathbf{w}$ ist;
z.B. setze $\mathbf{t} := \mathbf{w}$, und ersetze die betragsmäßig kleinste Komponente durch 1
 3. Setze $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{t} \times \mathbf{w}|}$ $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$

- Eigenschaften:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = +\mathbf{z} \quad \mathbf{y} \times \mathbf{z} = +\mathbf{x} \quad \mathbf{z} \times \mathbf{x} = +\mathbf{y}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{antikommutativ} / \text{schiefssymmetrisch})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\text{distributiv})$$

$$\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

- Es gilt die **Jacobi-Identität**:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

- Es gilt **nicht** die Assoziativität!

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

- Es gilt **nicht** das Auslöschungsgesetz!

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \not\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

- Zusammenhang zwischen den Beträgen von Kreuz- und Skalarprodukt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

- Das Kreuzprodukt lässt sich auch als Matrix-Vektor-Produkt schreiben
 - Definiere dazu die zum Vektor $\mathbf{a}$ duale ([schiefsymmetrische](#)) Matrix $\mathbf{a}^\times$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}^\times \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

- Die Darstellung mit schiefssymmetrischer Matrix hat viele Vorteile, u.a.:

- $\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ aber $\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b}^\times \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}^\times) \cdot \mathbf{c}$

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ aber $\mathbf{a}^\times (\mathbf{b}^\times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^\times \mathbf{b}^\times) \mathbf{c}$

- Fazit: bei der Schreibweise mit schief-symmetrischer Matrix $\mathbf{a}^\times$ gilt die Assoziativität!

- Warum ist $\mathbf{a}^\times(\mathbf{b}^\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}^\times\mathbf{b}^\times)\mathbf{c}$,
aber trotzdem $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$?
- Weil $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ äquivalent zum Ausdruck $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\times\mathbf{c}$ ist,
aber die Matrix $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\times$ verschieden ist von der Matrix $\mathbf{a}^\times\mathbf{b}^\times$
- Hintergrund:
 - Beim Ausdruck $\mathbf{a}^\times\mathbf{c}$ wird die Matrix $\mathbf{a}^\times$ als konstant betrachtet und ist eine lineare Abbildung, die auf den (variablen) Vektor $\mathbf{c}$ wirkt
 - Dasselbe gilt für den Ausdruck $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$: wenn $\mathbf{a}$ konstant ist, ist das ein linearer Ausdruck in den Koordinaten von $\mathbf{c}$
 - Lineare Abbildungen, die hintereinander ausgeführt werden, ergeben wieder eine lineare Abbildung

Das Tripel-Kreuzprodukt

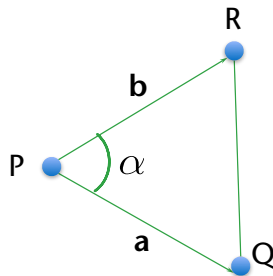
- Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt und Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

- Heißt auch "*triple product expansion*", "*triple cross product identity*" oder **Graßmann-Identität** oder **Graßmannscher Entwicklungssatz**
 - Eselsbrücke: "ABC = BAC- CAB" ("erst backen, dann kappen")
 - Oder: alle zyklischen Permutationen von A,B,C

- Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$\begin{aligned} A(\triangle PQR) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \end{aligned}$$



- Erweiterung: Flächeninhalt mit Vorzeichen

$$A(\triangle PQR) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| & , P, Q, R \text{ gegen Uhrzeigersinn} \\ -\frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| & , P, Q, R \text{ im Uhrzeigersinn} \end{cases}$$

- Achtung: ist eine **reine Konvention** / Definition – sie ist in keiner Weise der Geometrie inhärent! (aber eine sehr praktische Konvention, macht aber so nur in **2D** Sinn!)

- Satz ("SPQR-Satz"):

Sei PQR ein Dreieck und S ein **beliebiger** Punkt in derselben Ebene.

Dann gilt:

$$A(\triangle PQR) = A(\triangle SPQ) + A(\triangle SQR) + A(\triangle SRP)$$

- Bezeichnung: $\square PQRS$ = Viereck (*quadrangle, quadrilateral*)

1. Fall: S liegt im Inneren des Dreiecks

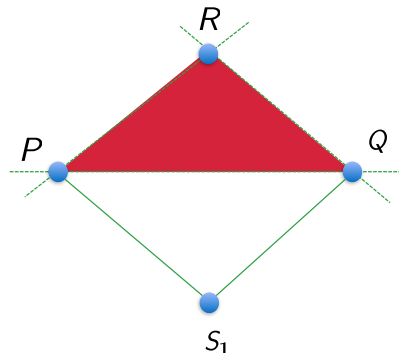
→ Behauptung ist klar

2. Fall: S liege außerhalb des Dreiecks

- Annahme: $S = S_1$
- Klar ist: $A(\triangle PQR) = A(\square PSQR) - A(\triangle SQP)$

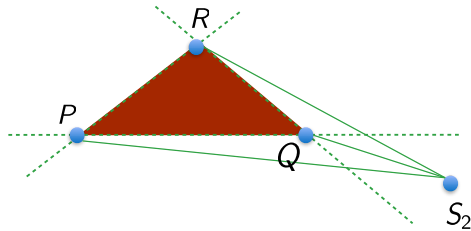
⇒ Behauptung

- Plausibilitäts-Check: $A(\triangle SPQ) < 0$



3. Fall: $S = S_2$

- Dann ist $A(\triangle PQR) = A(\triangle SRP) - A(\triangle SQP) - A(\triangle SRQ)$
 und $A(\triangle SPQ) < 0$
 und $A(\triangle SQR) < 0$
 $\Rightarrow$ Behauptung



- Falls S in einer der anderen Regionen liegt, folgt die selbe Behauptung durch Umbenennen der Ecken des Dreiecks

- Der Flächeninhalt als Determinante:

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} P_x & P_y & 1 \\ Q_x & Q_y & 1 \\ R_x & R_y & 1 \end{pmatrix}, \quad P, Q, R \in \mathbb{R}^2$$

- Beweisskizze:
 - P, Q, R in $\mathbb{R}^3$ einbetten mit jew. $z = 0$
 - Determinante vergleichen mit der z -Komponente von $(Q - P) \times (R - P)$

Fläche eines Polygons

- Definition (Ohr):

Sei $V^1, \dots, V^n$ ein überschneidungsfreies Polygon in einer Ebene.

Eine Ecke V^i heißt "Ohr" gdw. die Strecke $V^{i-1}V^{i+1}$ komplett im Inneren des Polygons liegt.

- Satz (ohne Beweis):

Jedes überschneidungsfreie Polygon in einer Ebene hat
mindestens 2 Ohren.

- Satz (Fläche eines Polygons):

Für jedes geschlossene, überschneidungsfreie Polygon $V^1, \dots, V^n$ und einen beliebigen Punkt P in der Ebene gilt:

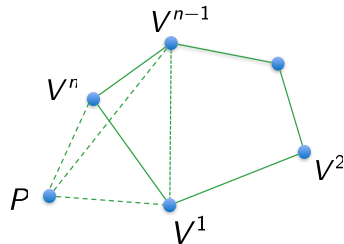
$$A(\text{Polygon}) = \sum_{i=1}^n A(\triangle P V^i V^{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_x^i V_y^{i+1} - V_y^i V_x^{i+1}$$

- Beweis: Teil 1

- Induktionsanfang: $n = 3$

Aus SPQR-Satz $\Rightarrow A = A(PV^1V^2) + A(PV^2V^3) + A(PV^3V^1)$

- Induktionsschritt: $n > 3$
 o.B.d.A. ist $V^n = \text{Ohr}$
 (sonst die V^i umnummerieren)
 Nun gilt:



$$A = \sum_{i=1}^{n-2} A(PV^iV^{i+1}) + A(PV^{n-1}V^1) + A(V^1V^{n-1}V^n)$$

Induktionsvoraussetzung

||

$$A(PV^1V^{n-1}) + A(PV^{n-1}V^n) + A(PV^nV^1)$$

⇒ Behauptung

- Beweis Teil 2: betrachte alle Punkte als 3D-Punkte in der xy-Ebene

$$A(PV^iV^{i+1}) = \text{z-Komponente von } \frac{1}{2} (V^i - P) \times (V^{i+1} - P)$$

Wähle $P = 0 \Rightarrow$

$$A(PV^iV^{i+1}) = \text{z-Komponente von } \frac{1}{2} V^i \times V^{i+1}$$

$\Rightarrow$ Behauptung

Geometrische Prädikate ("Tests")

- Ein **geometrisches Prädikat** ist eine Formel / ein Algorithmus, die erfüllt ist / der "wahr" liefert, wenn eine bestimmte geometrische Bedingung erfüllt ist.
- Beispiel: sind zwei Kanten $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ parallel?
- Lösungen:
 - $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow (Q - P) \times (S - R) = 0$
 - $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow \frac{(Q - P)}{\|(Q - P)\|} \cdot \frac{(S - R)}{\|(S - R)\|} = 1$
- Beachte die numerische Robustheit!

Beispiel: schneiden sich zwei koplanare Kanten?

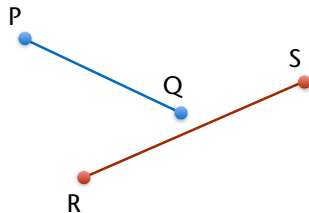
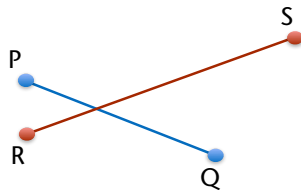
- Das Prädikat: " $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ schneiden sich"
- kann man mathematisch so fassen:

$$(\overline{PR} \times \overline{PQ}) \cdot (\overline{PQ} \times \overline{PS}) > 0$$

und

$$(\overline{RQ} \times \overline{RS}) \cdot (\overline{RS} \times \overline{RP}) > 0$$

- Achtung: funktioniert nur, wenn die Voraussetzung erfüllt ist!**
 - Alle 4 Punkte befinden sich in einer Ebene



- Definition **Konvexität**:

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ist **konvex** $\Leftrightarrow$

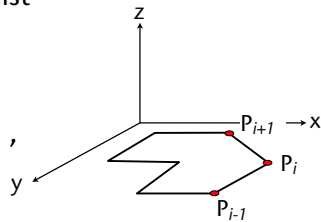
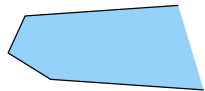
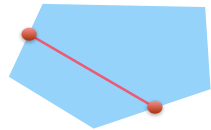
für alle $P_1, P_2 \in G$ die gesamte Linie $\overline{P_1 P_2} \subseteq G$ ist.

- Bemerkung:

- Das Gebiet muß nicht beschränkt sein
- Die Aussage "ein Polygon ist konvex" meint eigtl., daß das von dem Polygon umschlossene Gebiet (inkl. Rand) konvex ist

- Aufgabe: stelle für ein gegebenes Polygon fest, ob es konvex ist

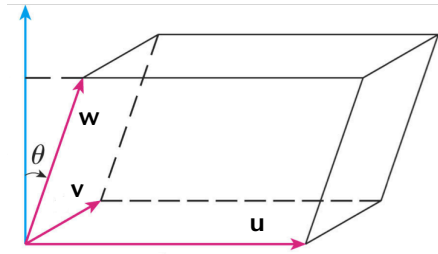
- Lösung: berechne an jeder Ecke $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1}$, $\mathbf{v}_i = P_i - P_{i-1}$, und teste das Vorzeichen der z-Komponente
- Voraussetzung: Polygon muss überschneidungsfrei sein



Das Spatprodukt

- Definition:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



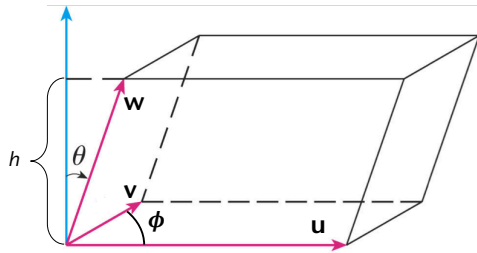
- Englische Begriffe:
scalar triple product, triple product, mixed product,

- Geometrische Interpretation:

$$\text{Vol}(\text{Spat}) = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$$

- Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Spat}) &= \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \\ &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \phi \|\mathbf{w}\| \cos \theta \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta \\ &= \|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}\| \end{aligned}$$



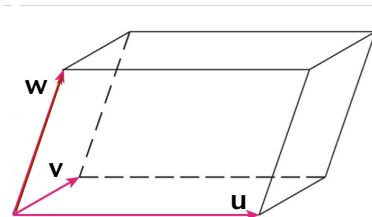
- Erweiterung des Volumens um ein **Vorzeichen**:

$$\text{Vol}(\text{Spat}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

- $\text{Vol}(\text{Spat}) > 0 \Leftrightarrow$

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bilden ein Rechtssystem $\Leftrightarrow$

Winkel zwischen $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ und $\mathbf{w} < 90^\circ$



- Bemerkung: $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix}$

Denksportaufgabe

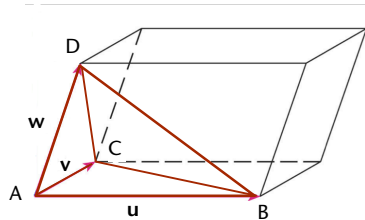
- Wenn man einen Würfel in Tetraeder zerschneidet (= partitioniert), wieviele Tetraeder erhält man dann?

Das Volumen eines Tetraeders

Optional

- Es gilt:

$$\begin{aligned}\text{Vol}(ABCD) &= \frac{1}{6}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \\ &= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \\ C_x & C_y & C_z & 1 \\ D_x & D_y & D_z & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



- Bemerkung: so bekommen die Punkte A, B, C, D einen "Umlaufsinn"!
- Achtung: ein Dreieck im 3D hat keinen Umlaufsinn per se!

Koplanarität & Umlaufsinn im 3D

- Definition **Umlaufsinn im 3D**:

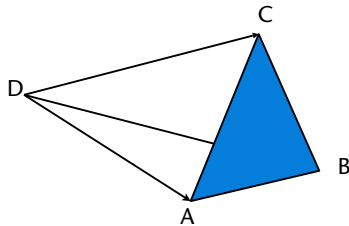
Drei Punkte A, B, C erscheinen von einem vierten Punkt D aus entgegen dem Uhrzeigersinn $\Leftrightarrow$

$$(A - D) \times (B - D) \cdot (C - D) < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Vol}(DACB) < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Vol}(ABCD) < 0$$

Your task: check the signs!

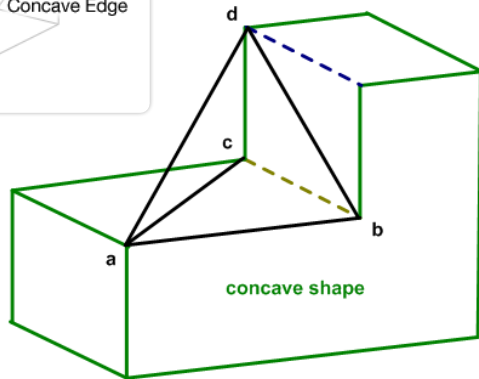
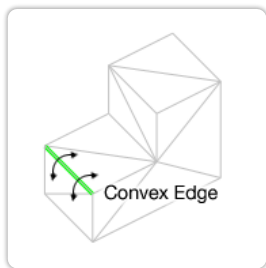
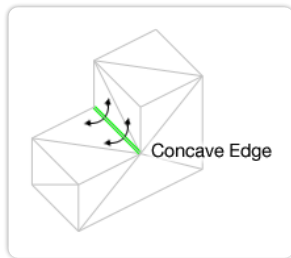


- Koplanarität:

Drei Vektoren **a**, **b**, **c** sind koplanar $\Leftrightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$

Konvexität in 3D

- Test auf Konvexität oder Konkavität einer Kante eines Polyeders:



- Wann liegt ein Punkt P im Inneren eines Tetraeders?

Genau dann, wenn die Vorzeichen von

$$\text{Vol}(ABCD)$$

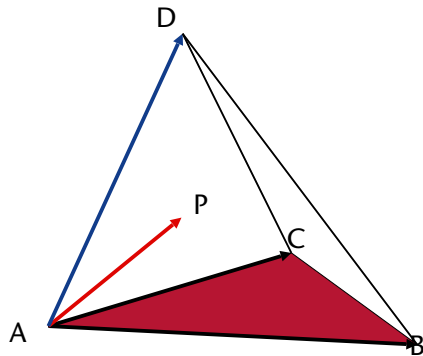
$$\text{Vol}(PBCD)$$

$$\text{Vol}(APCD)$$

$$\text{Vol}(ABPD)$$

$$\text{Vol}(ABCP)$$

alle gleich sind!

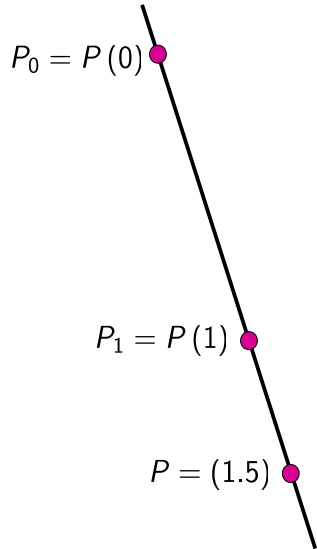


Parametrische Geraden (*parametric line*)

- Definition einer Geraden, die durch zwei Punkte geht:

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

- Interpretation:
zu $P(t)$ kommt man, indem man bei P_0 startet,
und um t "Einheiten" auf der Geraden in
Richtung P_1 geht

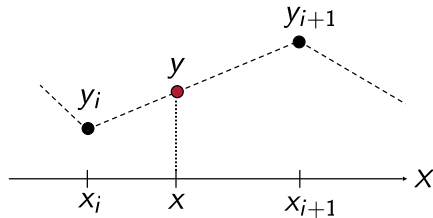


- Häufige Aufgabe in CG
 - Punkte, Farben, Höhen, etc., interpolieren
- Die Gerade $p(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1 - t)P_0 + tP_1$ ist eine lineare Interpolation im n -dim. Raum, $P_i \in \mathbb{R}^n$
- Erweiterung : **stückweise lineare Interpolation**
 - Wähle **Knotenvektor** $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ [ist evtl. schon gegeben]
 - Zu jedem t_i ist P_i gegeben
 - Um interpolierten Wert an der Stelle $t \in [t_0, t_n]$ zu bestimmen, bestimme i mit $t \in [t_i, t_{i+1}]$, weiter mit P_i, P_{i+1} wie vorhin

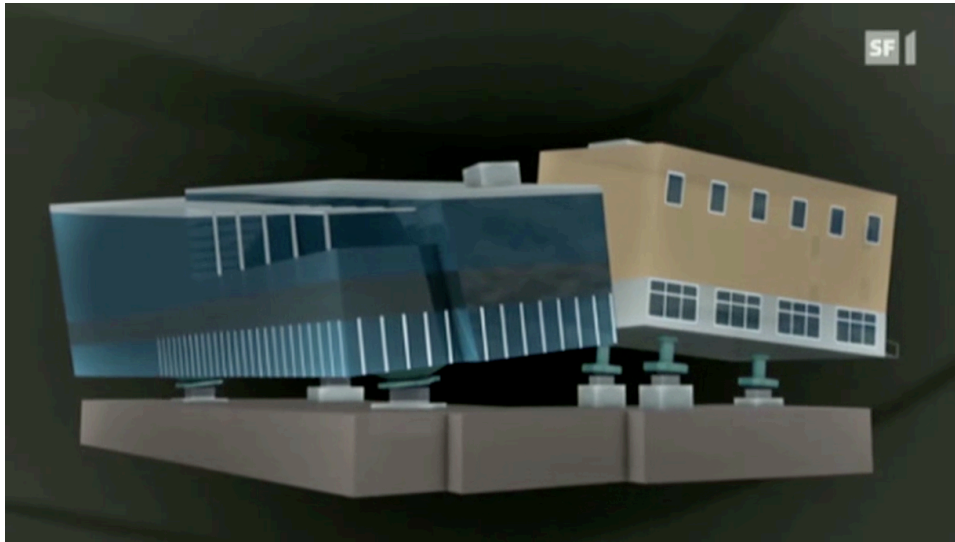
- Variante der stückweise linearen Interpolation im 1D
- Gegeben x_i, x_{i+1} und y_i, y_{i+1}
 - y_i könnte z.B. = Höhe, Rot-Kanal, o.ä. sein
- Gesucht y für $x \in [x_i, x_{i+1}]$
- Lineare Interpolation:

$$t := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \in [0, 1] \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$y = (1 - t) y_i + t y_{i+1}$$



Das Prinzip "3 Punkte liegen immer in einer Ebene" in der Architektur



SF 1

Aus der Sendung
"Einstein" vom
25.10. 2012 des
Schweizer
Fernsehens SF

Ebenen / Dreiecke

- Durch 3 Punkte wird eine Ebene aufgespannt
- Parameterdarstellung:

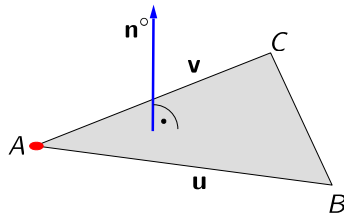
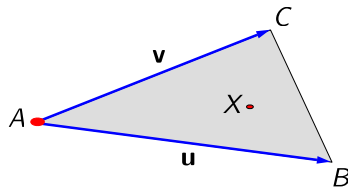
$$X = A + s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$$

- Für Dreiecke gilt zusätzlich:

$$s, t \in (0, 1), \quad s + t \leq 1$$

- Normale** eines Dreiecks / einer Ebene:

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$$



Exkurs: Verallgemeinerung $\rightarrow$ Simplex im $\mathbb{R}^d$ Optional

- **Simplex** := Polyeder mit genau $d+1$ **affin unabhängigen Punkte**

- Verbindung dieser Punkte + "Inneres"

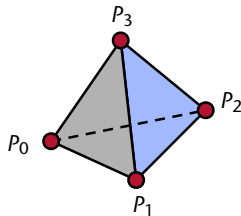
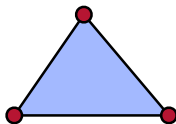
- Beispiele:

- 0D Simplex $\rightarrow$ Punkt
- 1D Simplex $\rightarrow$ Geradenstück ("Linie")
- 2D Simplex $\rightarrow$ Dreieck
- 3D Simplex $\rightarrow$ Tetraeder

- Allgemein:

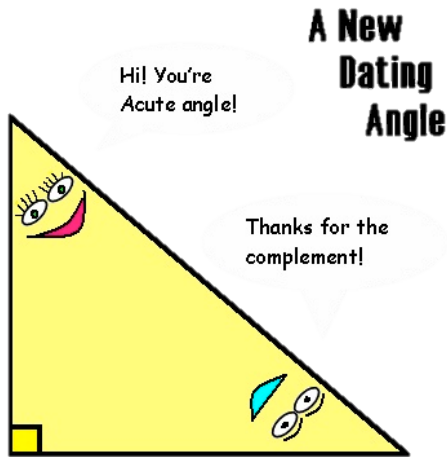
- Punkte $P_0, \dots, P_d$
- Simplex = alle Punkte X mit

$$X = P_0 + \sum_{i=1}^d s_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i = P_i - P_0, \quad s_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^d s_i \leq 1$$



- Englische Terminologie:
 "angle" = Winkel (fig. Blickwinkel)
 "*acute angle*" = spitzer Winkel
 "*obtuse angle*" = stumpfer Winkel

When Two Angles Meet
 Something about this
 just ain't right.



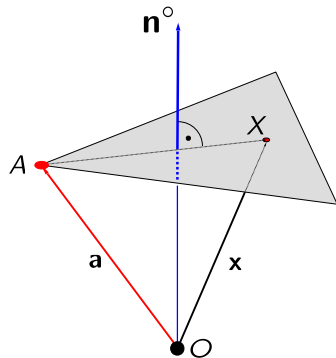
Normalenform der Ebene (implizite Form)

$$\overrightarrow{AX} \cdot \mathbf{n}^\circ = 0$$

$$(X - A) \cdot \mathbf{n}^\circ = 0$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ = 0$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - d = 0$$



- Geometrische Interpretation:

- Betrachte die Gerade durch den Ursprung in Richtung $\mathbf{n}^\circ$
- Jeder Punkt X ist ein Punkt der Ebene, gdw. er, auf diese Gerade projiziert, den gleichen Abstand vom Ursprung hat, wie die Projektion von A auf diese Gerade

- Mini-Lemma:

Eine Ebene $(\mathbf{n}, d)$ im $\mathbb{R}^k$ definiert

3 Äquivalenzklassen:

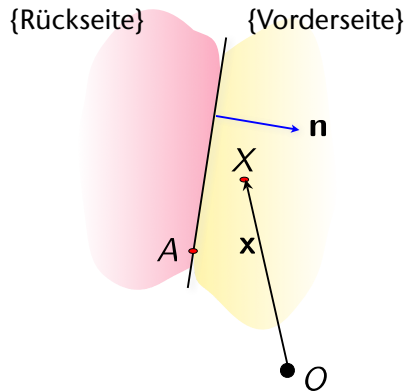
"Vorderseite" $:= \{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d > 0\}$

"Rückseite" $:= \{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d < 0\}$

Ebene selbst $:= \{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d = 0\}$

- Warum ist die Beschriftung korrekt?

- Weil $(X - A) \cdot \mathbf{n} = |X - A| \cdot |\mathbf{n}| \cdot \cos \theta$



Die Dualität von Punkten und Geraden in 2D

Homogeneous representation of line

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow (a, b, c)^T$$

A point $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$ lies on the line $\mathbf{l} = (a, b, c)^T$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{l} = \mathbf{l}^T \mathbf{x} = 0$$

equivalently,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{x} = 0$$

Intersection of two lines $\mathbf{l} = (a, b, c)^T$ and $\mathbf{l}' = (a', b', c')^T$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{l} = \mathbf{x}^T \mathbf{l}' = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$$

Line through two points $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$ and $\mathbf{x}' = (x', y', 1)^T$

$$\mathbf{l}^T \mathbf{x} = \mathbf{l}^T \mathbf{x}' = 0 \Rightarrow \mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}'$$

Duality of point and line

- Points and lines can be swapped.