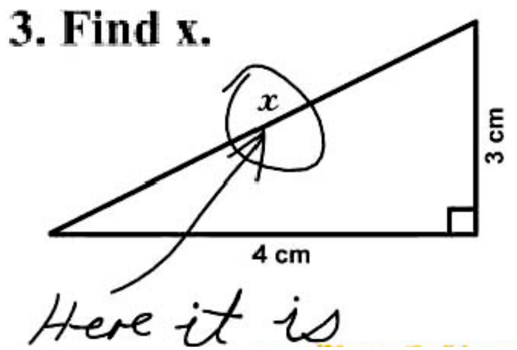
Computergraphik
Kurze Wiederholung in Geometrie



G. Zachmann

University of Bremen, Germany

cgvr.cs.uni-bremen.de

Vektoren

- Notation: in dieser VL schreiben wir Vektoren mit kleinen fetten Buchstaben:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

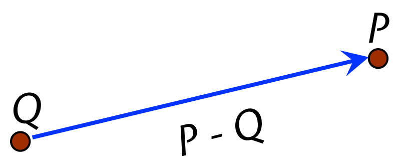
- Betrag / Länge:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} = a$$

- Beweis:

Unterschied zwischen Punkten und Vektoren

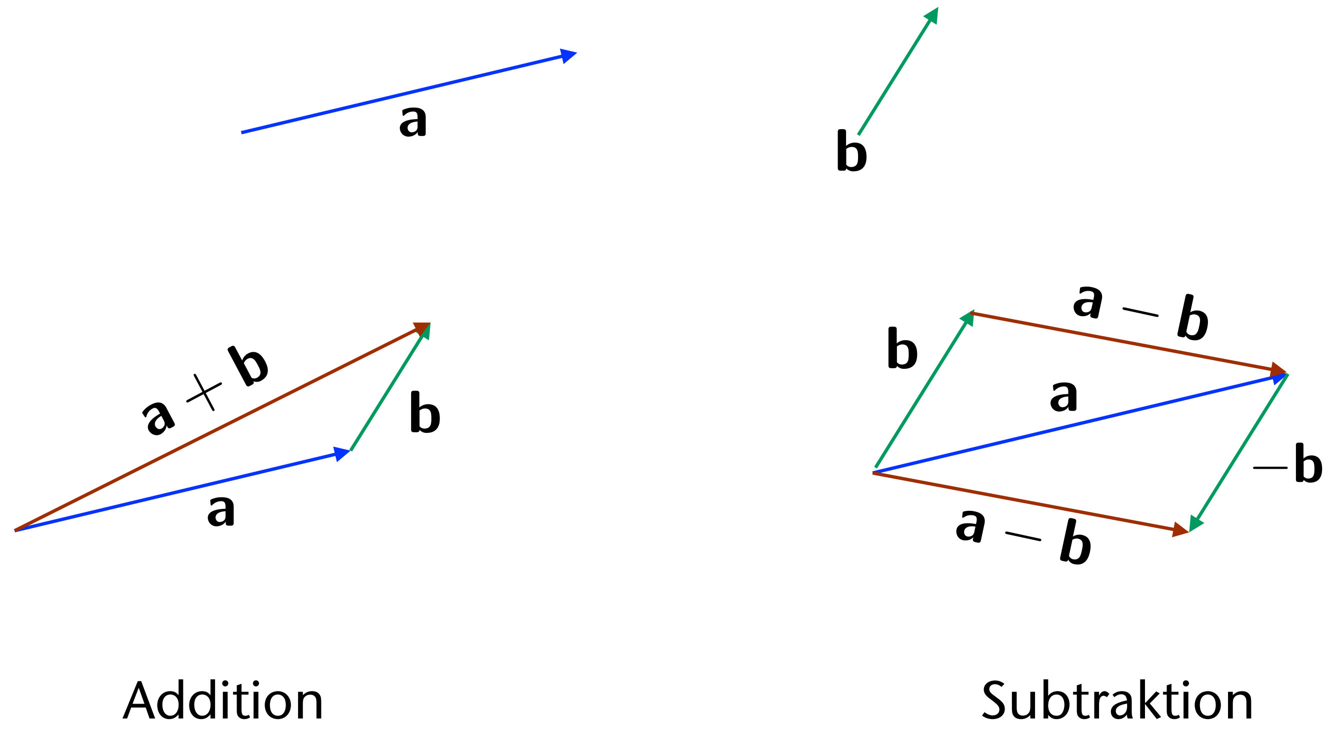
- Notation: Punkte mit normalen Großbuchstaben
- Achtung: Punkt ≠ Vektor !
- Unterschiedliche Bedeutung:
  - Punkt = Ort im Raum
  - Vektor = Richtung + Länge = Verschiebungsoperator
- Merkregeln:
  - Punkt + Vektor = Punkt
  - Vektor + Vektor = Vektor
  - Punkt - Punkt = Vektor (Notation: $\overline{QP}$)
  - Punkt + Punkt = undefiniert!
  - Korrespondenz mittels Ursprungspunkt O (→ Ortsvektor):



$$\mathbf{p} = P - O \qquad P = O + \mathbf{p}$$

Resultat der Interpretation eines Vektors als Verschiebeoperation

- Geometrische Interpretation der Vektor-Addition und Vektor-Subtraktion:



Terminologie

- Orthogonal = senkrecht zueinander
- Drei Vektoren sind koplanar $\Leftrightarrow$
  es gibt eine Ebene, die alle drei Vektoren enthält

- Persönliche Konvention auf den Folien: Begriffe, die neu definiert werden, werden mit blauer Schrift geschrieben

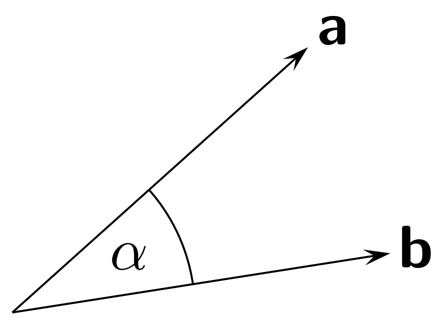
Das Skalarprodukt (*dot product*)

- Definition:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

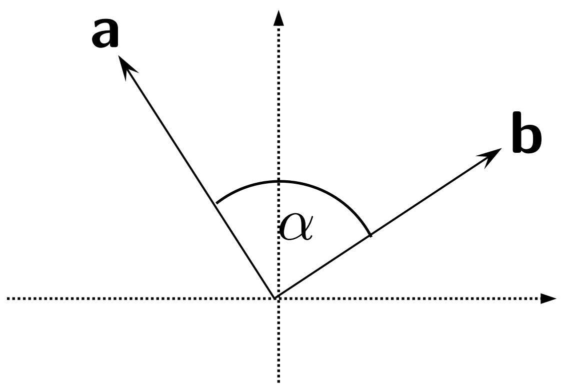
- Eine geometrische Interpretation:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha$$



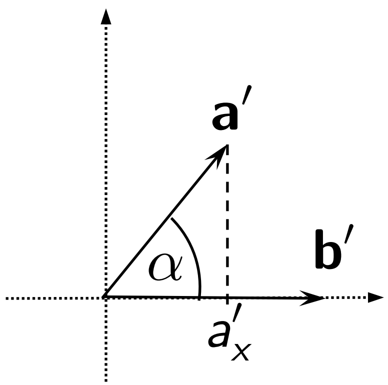
- Beweis (2D):
  - Sei θ_a = Winkel zwischen **a** und x-Achse
  - Damit ist

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(\theta_a - \theta_b)\\ &= \cos\theta_a\cos\theta_b + \sin\theta_a\sin\theta_b\\ &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}\frac{b_x}{|\mathbf{b}|} + \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}\frac{b_y}{|\mathbf{b}|}\end{aligned}$$



- Alternativer Beweis (*n*-dimensional):
  - Verbinde **a** und **b** starr miteinander
  - Rotiere beide so, dass **b** auf der x-Achse zu liegen kommt → **b**',
    und **a** irgendwo in der xy-Ebene → **a**'
    (der Winkel α zwischen beiden bleibt unverändert)
  - Damit ist $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{a}^T I \mathbf{b}$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{a}^T R^{-1} R\mathbf{b} \\
&= (\mathbf{a}^T R^T)(R\mathbf{b}) \\
&= (R\mathbf{a})^T (R\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \qquad = \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b'_x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

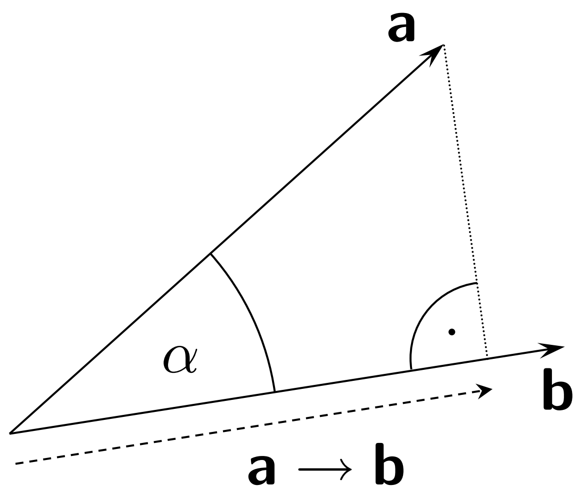


$$= a'_x \cdot b'_x = |\mathbf{a}'| \cos\alpha \cdot |\mathbf{b}'| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos\alpha$$

Weitere geometrische Bedeutung des Skalarproduktes

- Die senkrechte Projektion:

$$\left|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}\right| = |\mathbf{a}| \cdot \cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

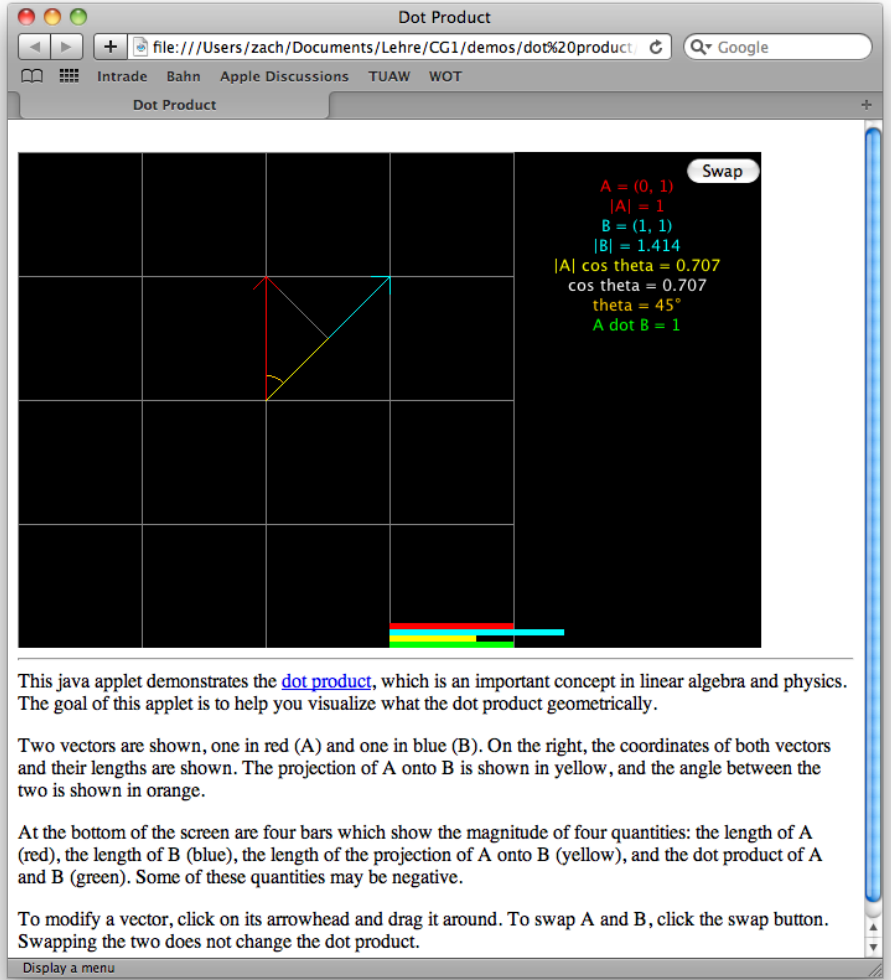


- Mit anderen Worten: das Skalarprodukt lässt sich als senkrechte Projektion auf einen Einheitsvektor interpretieren;

  d.h., falls $|\mathbf{e}| = 1$

  dann ist $\left|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{e}\right| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}$

Demo zum Skalarprodukt (dot product)



http://www.falstad.com/dotproduct/

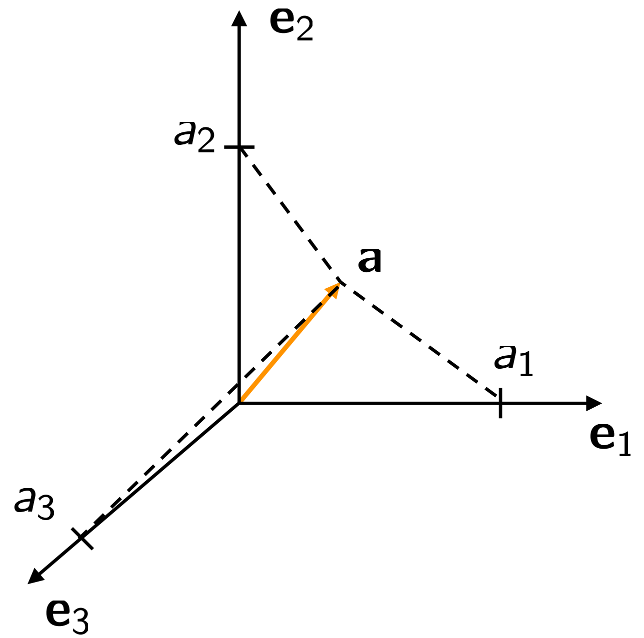
Darstellung eines Vektors bzgl. einer orthogonalen Basis

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_1 =: a_1$$

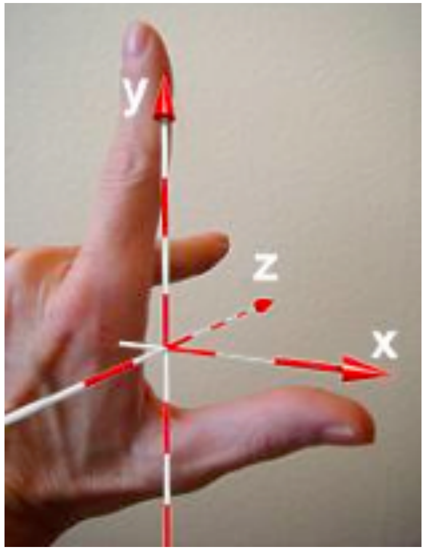
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_2 =: a_2$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_3 =: a_3$$

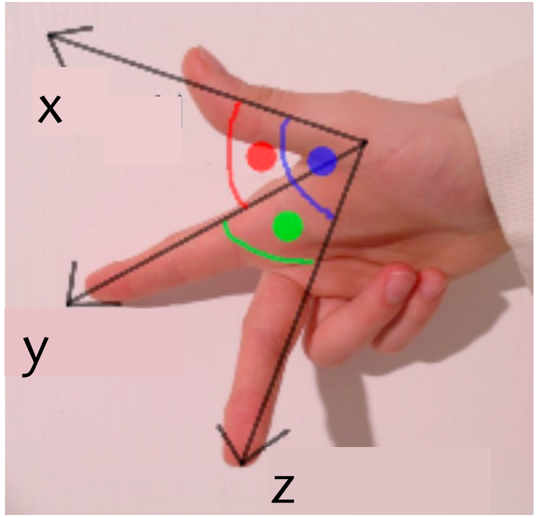


$$\mathbf{a} = a_1\cdot\mathbf{e}_1 + a_2\cdot\mathbf{e}_2 + a_3\cdot\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Eine Konvention bei 3D-Koordinatensystemen



left handed system
(Linkssystem)



right handed system
(Rechtssystem)

Achtung: wir verwenden *immer* das rechtshändige Koordinatensystem! (es sei denn, es steht etwas anderes da)

Ungleichungen für das Skalarprodukt

- Schwarz-Ungleichung:

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$$

- Dreiecksungleichung:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

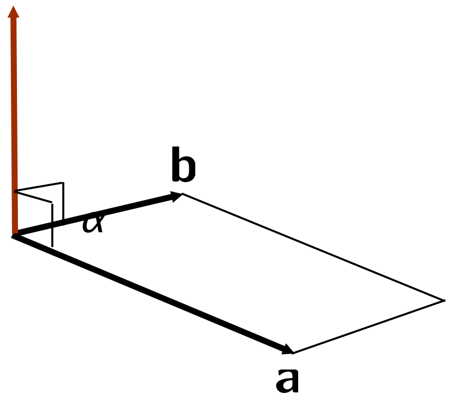
Das Kreuzprodukt (*cross product*)

- Definition in 3D:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

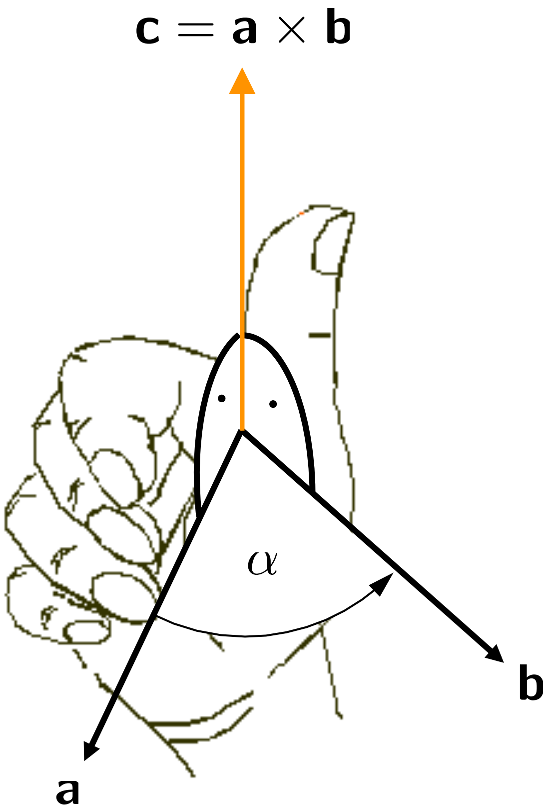
- Ergebnis ist ein Vektor, der senkrecht auf beiden Vektoren steht
- Länge des Vektors = Flächeninhalt des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

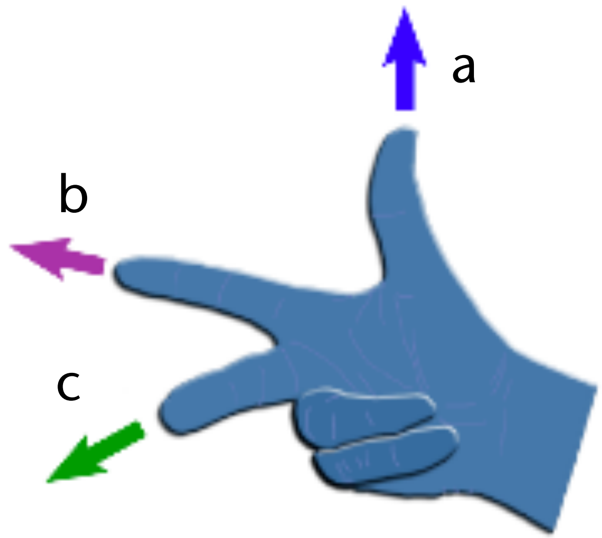
$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$$



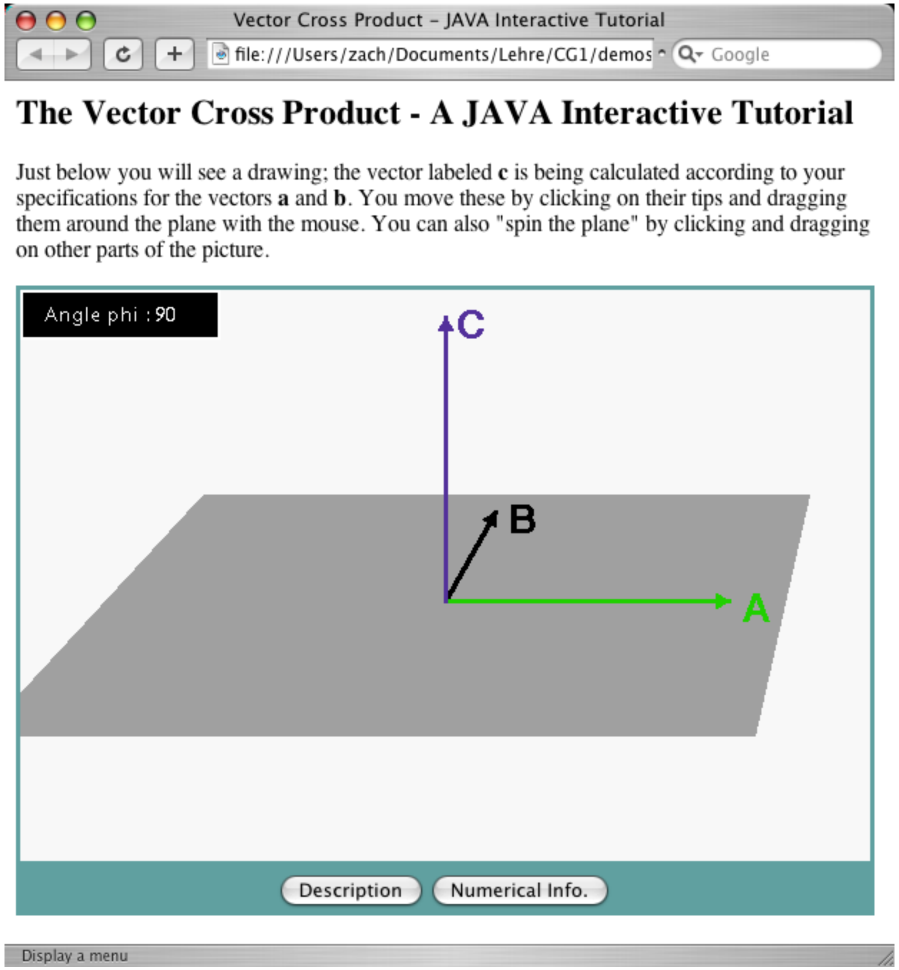
- Nützlich zur Erstellung von Koordinatensystemen (dazu später)

- Eselsbrücke: Rechte-Hand-Regeln





Demo



http://www.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html

Konstruktion eines Koordinatensystems

- Häufige Aufgabe:
  - Ein Vektor $\mathbf{a}$ ist gegeben (z.B. Blickrichtung)
  - Erstelle dazu eine Orthonormalbasis
- Nicht eindeutig, aber oft genügt *irgendeine* Orthonormalbasis
- Algo:

1. Setze $\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$
2. Für $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ benötigen wir irgend einen Vektor $\mathbf{t}$, der nicht kollinear zu $\mathbf{w}$ ist;

   z.B. setze $\mathbf{t} := \mathbf{w}$, und ersetze die betragsmäßig kleinste Komponente durch 1
3. Setze $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{t} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{t} \times \mathbf{w}|}$ $\qquad \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$

- Eigenschaften:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = +\mathbf{z} \quad \mathbf{y} \times \mathbf{z} = +\mathbf{x} \quad \mathbf{z} \times \mathbf{x} = +\mathbf{y}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$ (antikommutativ / schiefsymmetrisch)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$ (distributiv)

$$\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

- Es gilt die Jacobi-Identität:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

- Es gilt **nicht** die Assoziativität!

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

- Es gilt **nicht** das Auslöschungsgesetz!

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \not\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

- Zusammenhang zwischen den Beträgen von Kreuz- und Skalarprodukt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

Exkurs

- Das Kreuzprodukt lässt sich auch als Matrix-Vektor-Produkt schreiben
  - Definiere dazu die zum Vektor **a** duale (schiefsymmetrische) Matrix $\mathbf{a}^\times$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}^\times \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

- Die Darstellung mit schiefsymmetrischer Matrix hat viele Vorteile, u.a.:
  - $\mathbf{a}^\mathsf{T} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}^\mathsf{T} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

    aber

    $\mathbf{a}^\mathsf{T} \cdot (\mathbf{b}^\times \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^\mathsf{T} \cdot \mathbf{b}^\times) \cdot \mathbf{c}$
  - $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

    aber

    $\mathbf{a}^\times (\mathbf{b}^\times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^\times \mathbf{b}^\times) \mathbf{c}$
  - Fazit: bei der Schreibweise mit schief-symmetrischer Matrix $\mathbf{a}^\times$ gilt die Assoziativität!

Das Tripel-Kreuzprodukt

- Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt und Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

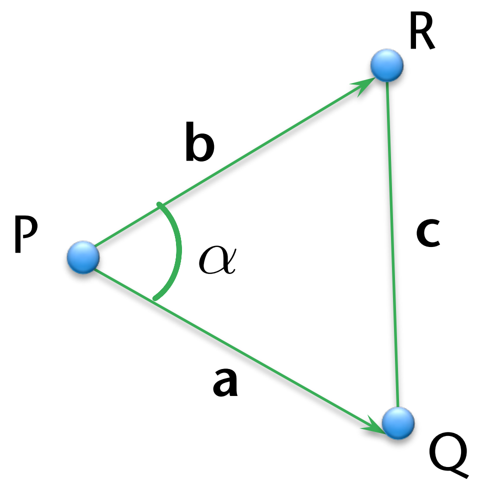
- Heißt auch *"triple product expansion", "triple cross product identity"* oder Graßmann-Identität oder Graßmannscher Entwicklungssatz
  - Eselsbrücke: "ABC = BAC- CAB" ("erst backen, dann kappen")
  - Oder: alle zyklischen Permutationen von A,B,C

Flächeninhalte

- Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2}\,\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\,\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\,\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$$



- Erweiterung: Flächeninhalt mit Vorzeichen

$$A(\triangle PQR) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| & , \; P, Q, R \text{ gegen Uhrzeigersinn} \\ -\frac{1}{2}\,\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| & , \; P, Q, R \text{ im Uhrzeigersinn} \end{cases}$$

  - Achtung: dies ist eine reine Konvention / Definition – sie ist in keiner Weise der Geometrie inhärent!! (aber eine sehr praktische Konvention)

- Satz:

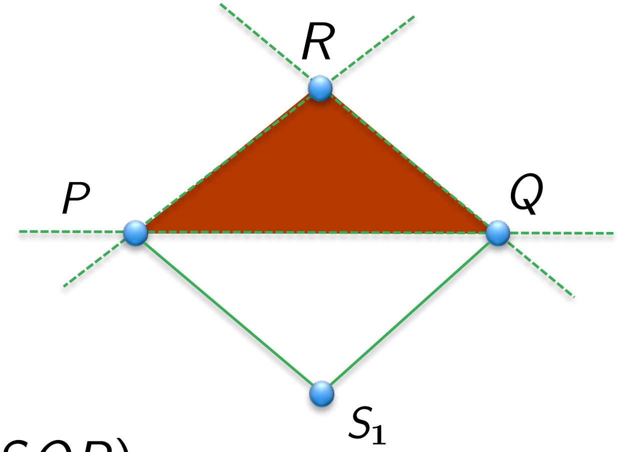
  Sei PQR ein Dreieck und S ein beliebiger Punkt in derselben Ebene.

  Dann gilt:

$$A(\triangle PQR) = A(\triangle SPQ) + A(\triangle SQR) + A(\triangle SRP)$$

- Bezeichnung: $\square PQRS$ = Viereck (*quadrangle, quadrilateral*)

- Beweis:
  - Fall: S liegt im Inneren des Dreiecks
    $\rightarrow$ Behauptung ist klar
  - Also: S liege außerhalb des Dreiecks
  - Annahme: $S = S_1$
  - Klar ist:



$$A(\triangle PQR) = A(\square PSQR) - A(\triangle SQP)$$

$\Rightarrow$ Behauptung

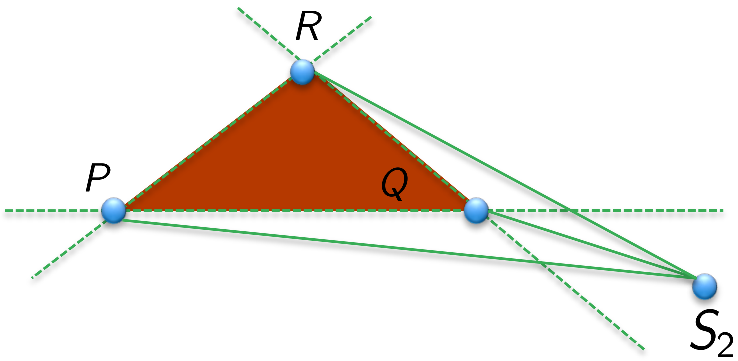
  - Plausibilitäts-Check: $A(\triangle SPQ) < 0$

- Annahme: $S = S_2$
- Dann ist $A(\triangle SPQ) < 0$

  und $A(\triangle SQR) < 0$

  und $A(\triangle PQR) = A(\triangle SRP) - A(\triangle SQP) - A(\triangle SRQ)$

  $\Rightarrow$ Behauptung



- Falls S in einer der anderen Regionen liegt, folgt die selbe Behauptung durch Umbenennen der Ecken des Dreiecks

- Der Flächeninhalt als Determinante:

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} P_x & P_y & 1 \\ Q_x & Q_y & 1 \\ R_x & R_y & 1 \end{pmatrix}, \quad P, Q, R \in \mathbb{R}^2$$

- Beweisskizze:
  - P, Q, R in $\mathbb{R}^3$ einbetten mit jew. $z = 0$
  - Determinante ausrechnen und mit der z-Komponente von

$$(Q - P) \times (R - P)$$

    vergleichen

- Definition (Ohr):

  Sei $V^1, \cdots, V^n$ ein überschneidungsfreies Polygon in einer Ebene.

  Eine Ecke V^i heißt "Ohr" gdw. die Strecke $V^{i-1}V^{i+1}$ komplett im Inneren des Polygons liegt.

- Satz (ohne Beweis):

  Jedes überschneidungsfreie Polygon in einer Ebene hat mindestens 2 Ohren.

- Satz (Fläche eines Polygons):

  Für jedes geschlossene, überschneidungsfreie Polygon $V^1, \cdots, V^n$ und einen beliebigen Punkt P in der Ebene gilt:

$$A(\text{Polygon}) = \sum_{i=1}^{n} A\left(\triangle P V^i V^{i+1}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_x^i V_y^{i+1} - V_y^i V_x^{i+1}$$

- Beweis: Teil 1
  - Induktionsanfang: $n = 3$
    Aus Satz auf Seite 25 $\Rightarrow$

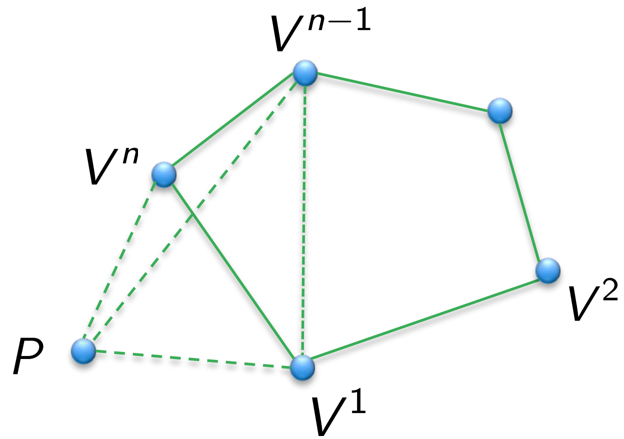
$$A = A(PV^1V^2) + A(PV^2V^3) + A(PV^3V^1)$$

- Induktionschritt: $n > 3$

  o.B.d.A. ist V^n = Ohr

  (sonst die V^i umnummerieren)

  Nun gilt:



$$A = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-2} A(PV^iV^{i+1}) + A(PV^{n-1}V^1)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} + \underbrace{A(V^1V^{n-1}V^n)}_{\parallel}$$

$$A(PV^1V^{n-1}) + A(PV^{n-1}V^n) + A(PV^nV^1)$$

$\Rightarrow$ Behauptung

- Beweis Teil 2:

$$A(PV^iV^{i+1}) = \text{ z-Komponente von } \frac{1}{2}(V^i - P) \times (V^{i+1} - P)$$

Wähle P = 0 $\Rightarrow$

$$A(PV^iV^{i+1}) = \text{ z-Komponente von } \frac{1}{2} V^i \times V^{i+1}$$

$\Rightarrow$ Behauptung

Geometrische Prädikate (Tests)

- Ein geometrisches Prädikat ist eine Formel / ein Algorithmus, die erfüllt ist / "wahr" liefert, wenn eine bestimmte geometrische Bedingung erfüllt ist.

- Beispiel: sind zwei Kanten $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ parallel?
- Lösungen:
  - $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow (Q-P) \times (S-R) = 0$
  - $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow \frac{(Q-P)}{\|(Q-P)\|} \cdot \frac{(S-R)}{\|(S-R)\|} = 1$

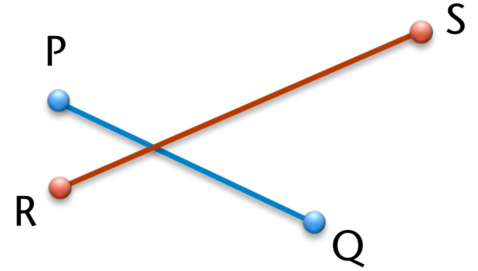
- Beachte die numerische Robustheit!

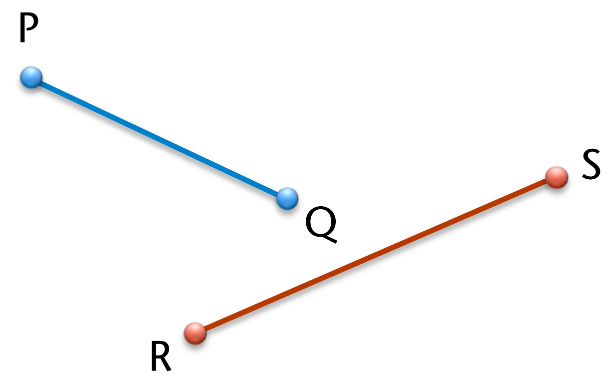
- Frage: schneiden sich zwei koplanare Kanten?
- Das Prädikat: " $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ schneiden sich" kann man mathematisch so fassen:

$$(\overline{PR} \times \overline{PQ}) \cdot (\overline{PQ} \times \overline{PS}) > 0$$

und

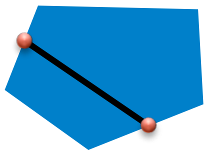
$$(\overline{RQ} \times \overline{RS}) \cdot (\overline{RS} \times \overline{RP}) > 0$$



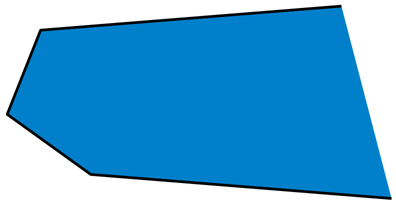


Konvexität

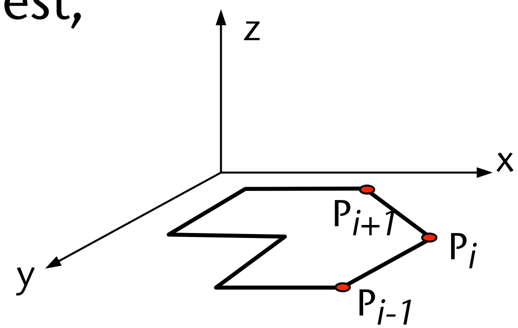
- Definition Konvexität (eine von vielen möglichen):
  Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ist konvex $\Leftrightarrow$
  für alle $P_1, P_2 \in G$ die gesamte Linie $\overline{P_1 P_2} \subseteq G$ ist.



- Bemerkung:
  - Das Gebiet muß nicht beschränkt sein
  - Die Aussage "ein Polygon ist konvex" meint eigtl., daß das von dem Polygon umschlossene Gebiet (inkl. Rand) konvex ist



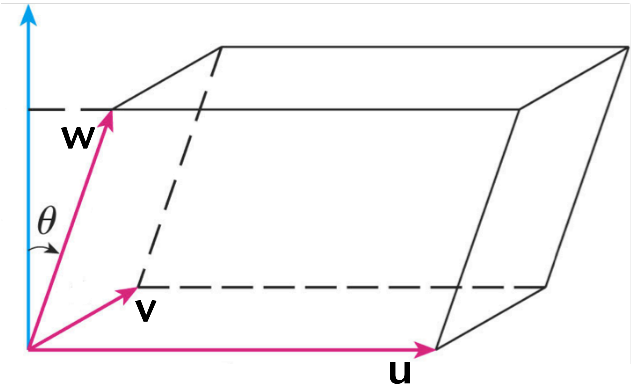
- Aufgabe: stelle für ein gegebenes Polygon fest, ob es konvex ist?
  - Lösung: berechne an jeder Ecke
    $$\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1} \ , \quad \mathbf{v}_i = P_{i+1} - P_i$$
    und teste Vorzeichen der z-Komponente
  - Voraussetzung: Polygon muss überschneidungsfrei sein



Das Spatprodukt

- Definition:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



- Englische Begriffe:

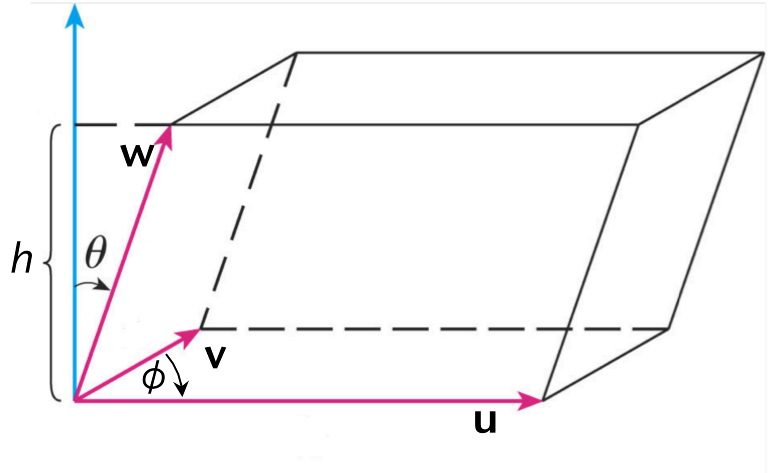
  scalar triple product, triple product, mixed product,

- Geometrische Interpretation:

$$\mathrm{Vol(Spat)} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|$$

- Beweis:

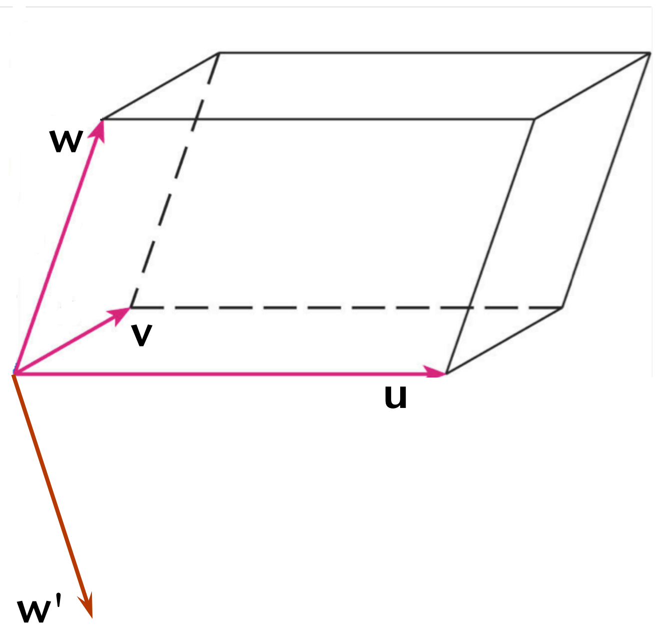
$$\begin{aligned}\mathrm{Vol(Spat)} &= \text{Grundfläche}\cdot\text{Höhe}\\ &= \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\Phi\,\|\mathbf{w}\|\cos\Theta\\ &= \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\Theta\\ &= \|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}\|\end{aligned}$$



- Erweiterung des Volumens um ein Vorzeichen:

$$\mathrm{Vol(Spat)} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

- Vol(Spat) > 0 $\Leftrightarrow$
  u, **v**, **w** bilden ein Rechtsystem $\Leftrightarrow$
  Winkel zwischen (**u** × **v**) und **w** < 90°



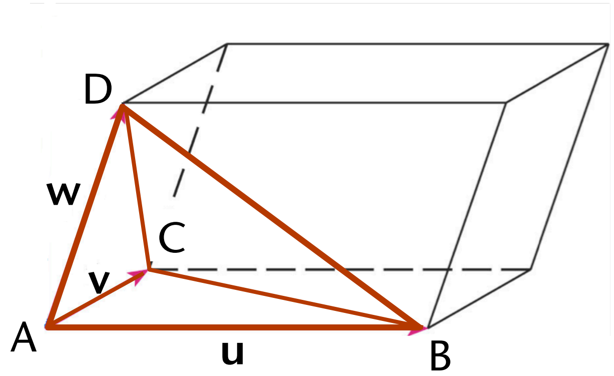
- Bemerkung:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix}$$

Denksportaufgabe

- Wenn man einen Würfel in Tetraeder zerschneidet, wieviele Tetraeder erhält man dann?

Das Volumen eines Tetraeders



- Es gilt:

$$\mathrm{Vol}(ABCD) = \frac{1}{6}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

$$= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \\ C_x & C_y & C_z & 1 \\ D_x & D_y & D_z & 1 \end{pmatrix}$$

- Bemerkung: so bekommt auch das Volumen ein Vorzeichen!
  - Und die Punkte A, B, C, D einen "Umlaufsinn"!
- Achtung: ein Dreieck im 3D hat keinen Umlaufsinn per se!

Koplanarität & Umlaufsinn im 3D

- Koplanarität:

  Drei Vektoren **a, b, c** sind koplanar $\Leftrightarrow$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$$

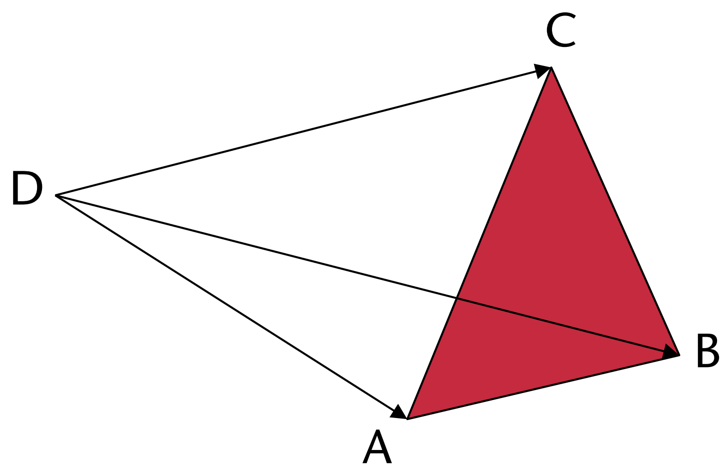
- Umlaufsinn im 3D:

  Drei Punkte A, B, C erscheinen von einem vierten Punkt D aus entgegen dem Uhrzeigersinn $\Leftrightarrow$

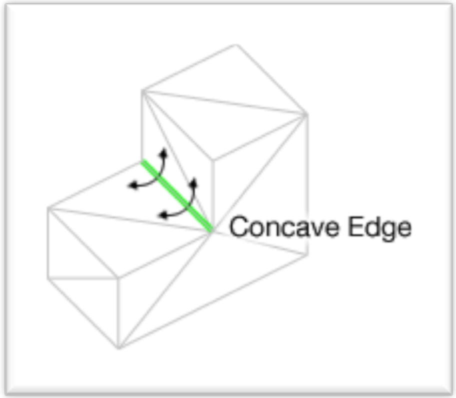
$$(A - D) \times (B - D) \cdot (C - D) < 0$$

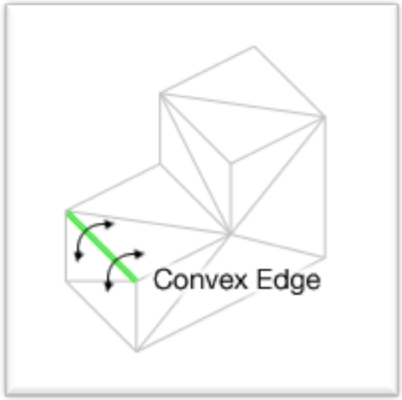
$$\Leftrightarrow \text{Vol}(DACB) < 0$$

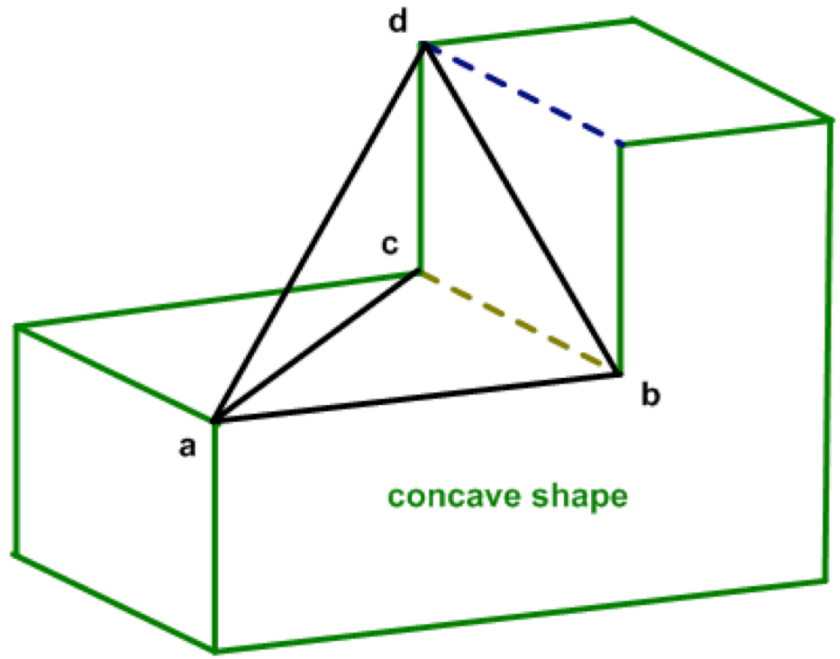
$$\Leftrightarrow \text{Vol}(ABCD) < 0$$



- Test auf Konvexität / Konkavität einer Kante:

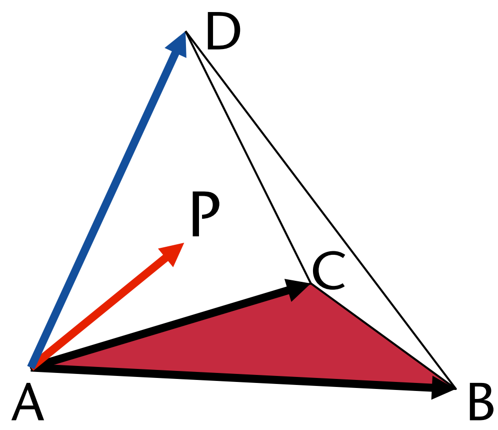






- Wann liegt ein Punkt P im Inneren eines Tetraeders?

Genau dann, wenn die Vorzeichen von



$$\text{Vol}(ABCD)$$

$$\text{Vol}(PBCD)$$

$$\text{Vol}(APCD)$$

$$\text{Vol}(ABPD)$$

$$\text{Vol}(ABCP)$$

alle gleich sind!

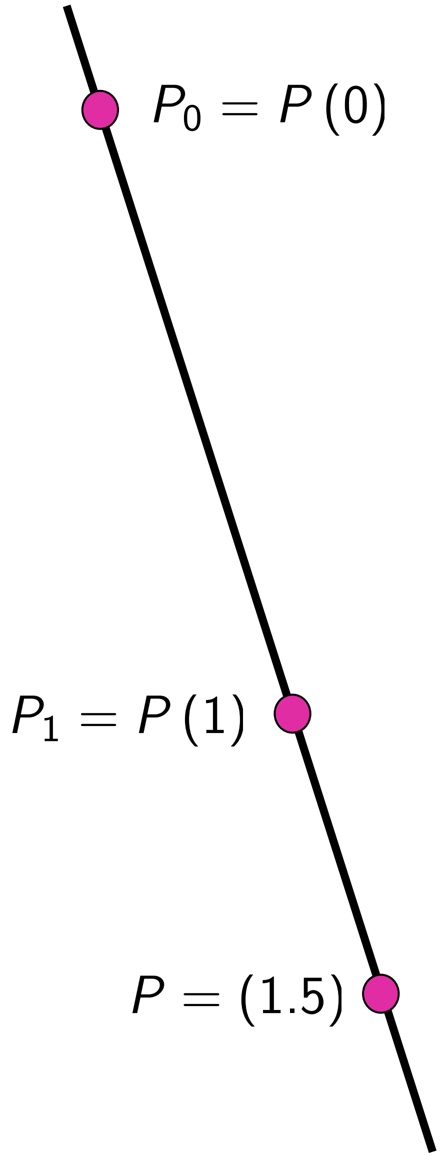
Parametrische Geraden (*parametric line*)

- Definition einer Geraden, die durch zwei Punkte geht:

$$P_0 = (x_0, y_0)\,, \qquad P_1 = (x_1, y_1)$$

$$P(t) = P_0 + t\,(P_1 - P_0)$$

- Interpretation: starte bei einem Punkt P_0, mache einen Schritt t entlang dieser Gerade von P_0 in Richtung P_1



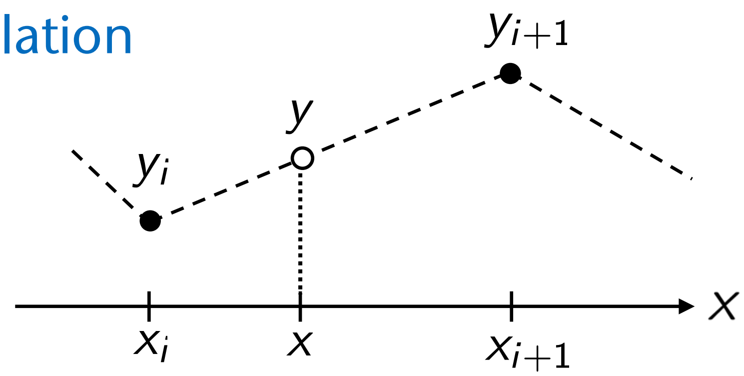
Lineare Interpolation

- Häufige Aufgabe in CG
  - Punkte, Farben, Höhen, etc., irgendwie interpolieren
- Die Gerade

$$p(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1-t)P_0 + tP_1$$

  ist schon lineare Interpolation im n–dim. Raum

- Variante: stückweise lineare Interpolation
  - Gegeben x_i, x_{i+1} und y_i, y_{i+1} (= Höhe oder andere Semantik)
  - Gesucht y für $x \in [x_i, x_{i+1}]$
  - Lineare Interpolation:



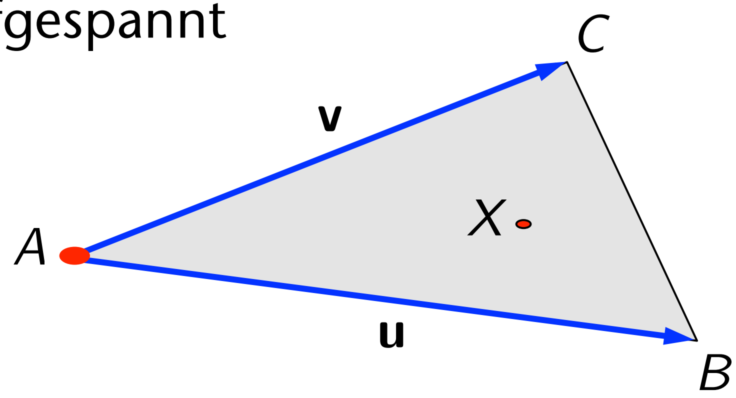
$$t := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \in [0,1] \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$y = (1-t)\,y_i + t y_{i+1}$$

Ebenen / Dreiecke

- Durch 3 Punkte wird eine Ebene aufgespannt
- Parameterdarstellung:

$$X = A + s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$$

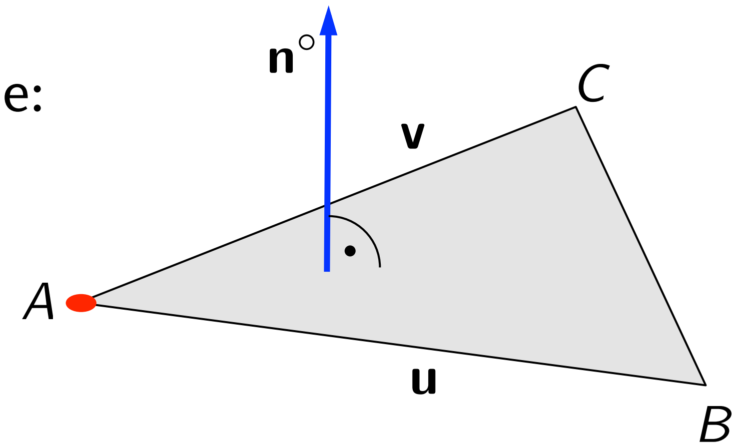


- Für Dreiecke gilt zusätzlich:

$$s, t \in (0, 1)\,, \qquad s + t \leq 1$$

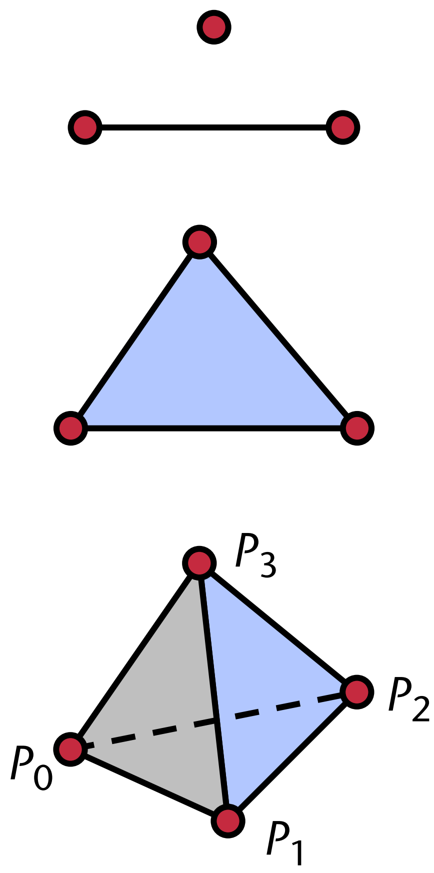
- Normale eines Dreiecks / einer Ebene:

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$$



Exkurs: Verallgemeinerung = Simplex im $\mathbb{R}^d$

- Simplex :=
  - d + 1 affin unabhängige Punkte
  - Verbindung dieser Punkte + "Inneres"
- Beispiele:
  - 0D: Punkt
  - 1D: Linie
  - 2D: Dreieck
  - 3D: Tetraeder
- Allgemein:
  - Punkte $P_0, \ldots, P_d$
  - Simplex = alle Punkte X mit



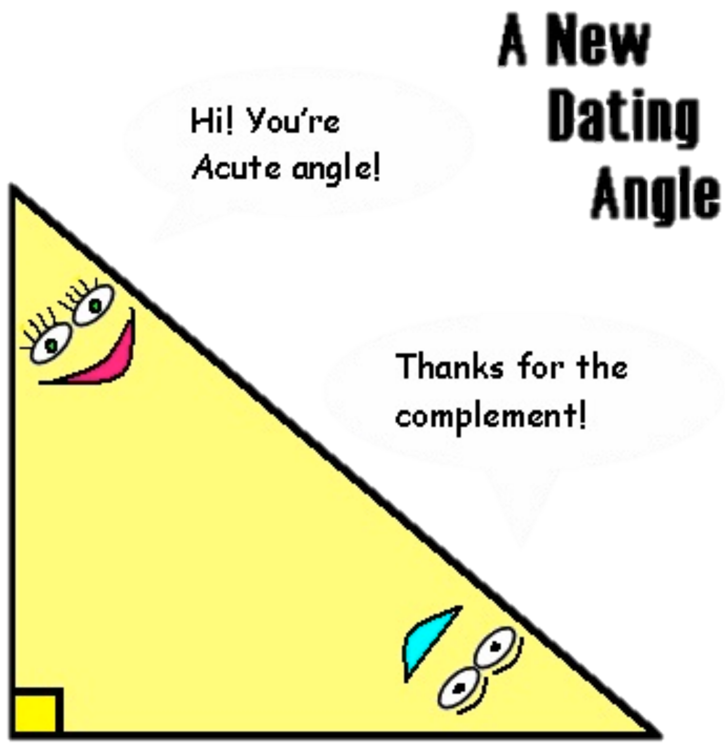
$$X = P_0 + \sum_{i=1}^{d} s_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i = P_i - P_0, \quad s_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{d} s_i \leq 1$$

- Terminologie:

  "*angle*" = Winkel (fig. Blickwinkel)

  "*acute angle*" = spitzer Winkel

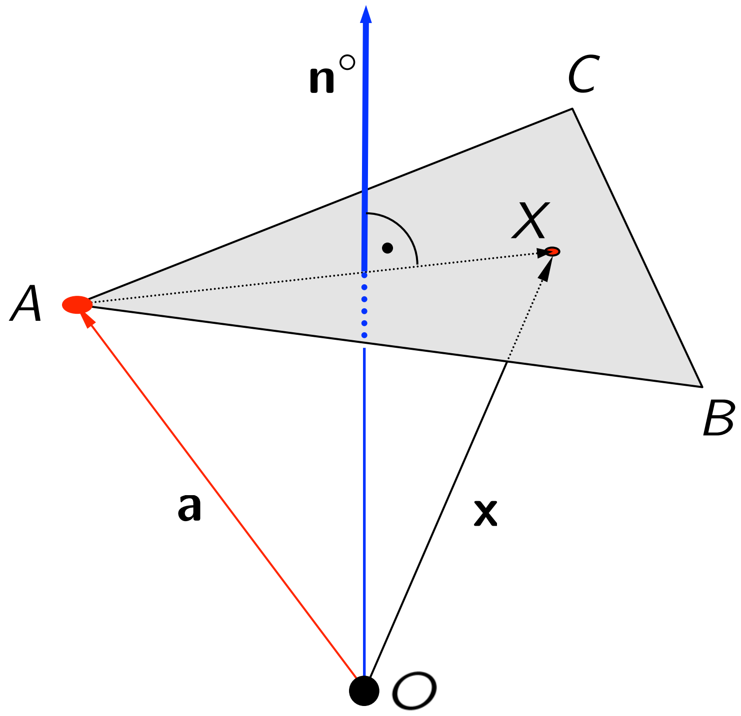
  "*obtuse angle*" = stumpfer Winkel



When Two Angles Meet
Something about this
just ain't right.

Normalenform der Ebene (implizite Form)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AX}\cdot\mathbf{n}^\circ &= 0\\
(X-A)\cdot\mathbf{n}^\circ &= 0\\
\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}^\circ - \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}^\circ &= 0\\
\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}^\circ - d &= 0
\end{aligned}$$



- Interpretation:
  - Gerade durch den Ursprung in Richtung $\mathbf{n}^\circ$
  - Jeder Punkt X ist ein Punkt der Ebene, gdw. er auf diese Gerade projiziert den gleichen Abstand vom Ursprung hat, wie die Projektion von A auf diese Gerade

- Mini-Lemma:

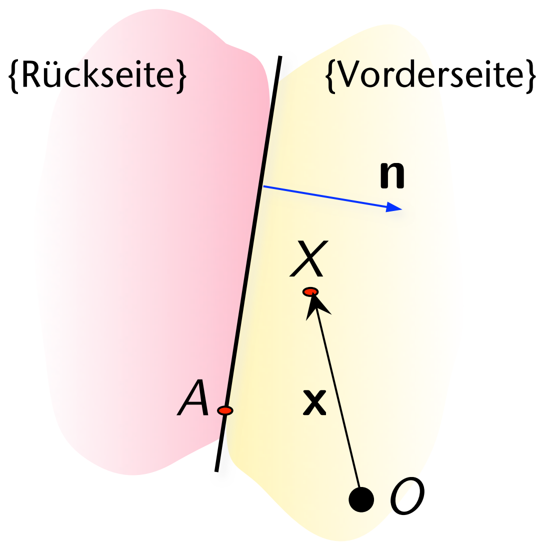
  Eine Ebene $(\boldsymbol{n},d)$ im $\mathbb{R}^k$ definiert

  3 Äquivalenzklassen:

  $$\text{"Vorderseite"} := \{X \mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - d > 0\}$$

  $$\text{"Rückseite"} := \{X \mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - d < 0\}$$

  $$\text{Ebene} := \{X \mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - d = 0\}$$



- Warum ist die Beschriftung korrekt?
  - Weil

$$(X - A)\cdot\mathbf{n} = |X - A|\cdot|\mathbf{n}|\cdot\cos\theta$$

Die Dualität von Punkten und Geraden in 2D

Homogeneous representation of line

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow (a, b, c)^{\mathrm{T}}$$

A point $\boldsymbol{x} = (x, y, 1)^{\mathrm{T}}$ lies on the line $\boldsymbol{l} = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$$

equivalently,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{x} = 0$$

Intersection of two lines $\boldsymbol{l} = (a, b, c)^{\mathrm{T}}$ and $\boldsymbol{l}' = (a', b', c')^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}'$$

Line through two points $\boldsymbol{x} = (x, y, 1)^{\mathrm{T}}$ and $\boldsymbol{x}' = (x', y', 1)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}'$$

Duality of point and line

- Points and lines can be swapped.