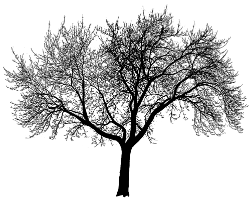
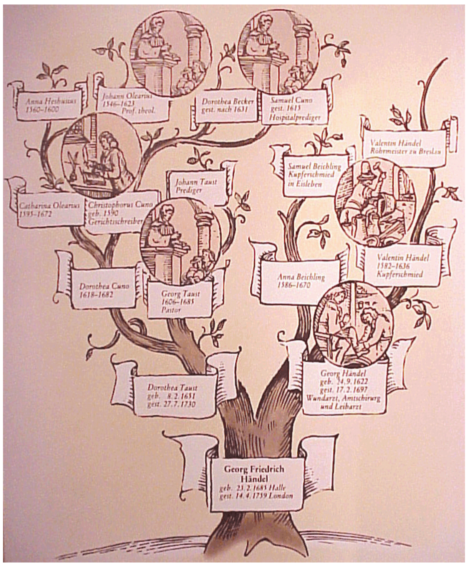
Informatik II
Bäume



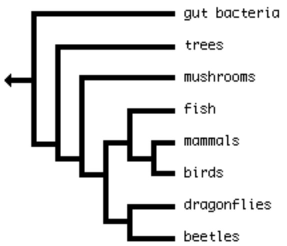
G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

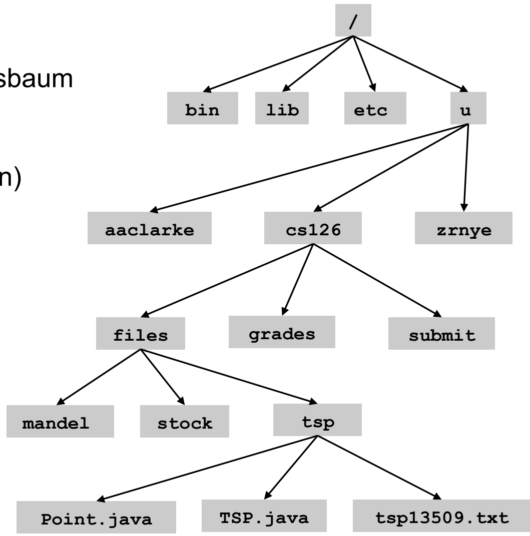
Beispiele

- Stammbaum

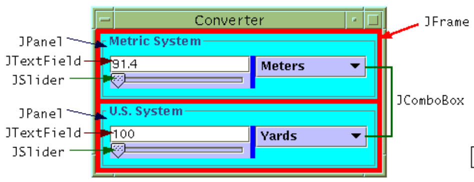


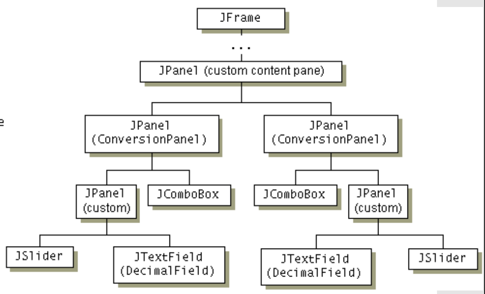
- Stammbaum
- Parse tree, Rekursionsbaum
- Unix file hierarchy
- Stammbaum (Evolution)





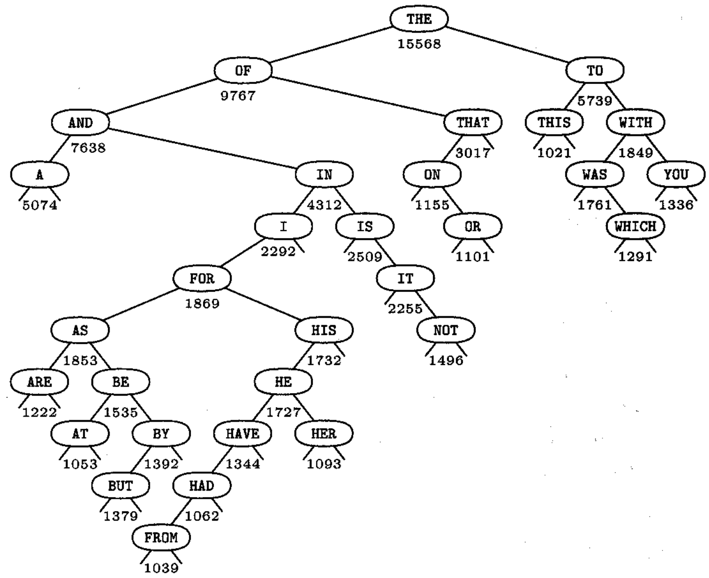
- Stammbaum
- Parse tree, Rekursionsbaum
- Unix file hierarchy
- Stammbaum (Evolution)
- GUI containment hierarchy





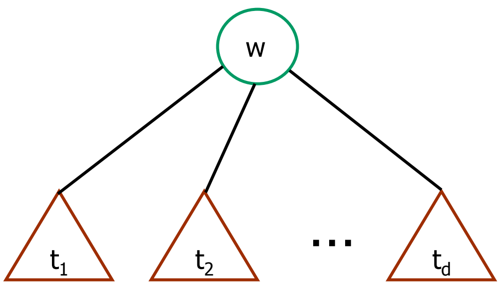
Reference: http://java.sun.com/docs/books/tutorial/uiswing/overview/anatomy.html

Binärer Suchbaum (später)



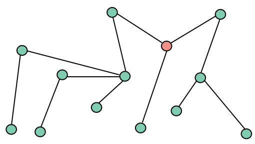
Definition

- Rekursive Definition:
  Ein Baum ist entweder
  - ein einzelner Knoten, oder
  - ein als Wurzel dienender Knoten w, der mit einer Menge von Bäumen $t_1,\dots,t_d$ verbunden ist.

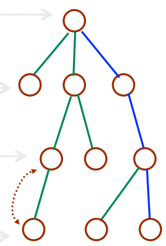


Terminologie bei Bäumen

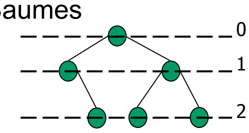
- Baum = Menge von Knoten und Kanten
- Knoten = repräsentiert beliebiges Objekt
- Kante = Verbindung zwischen zwei Knoten

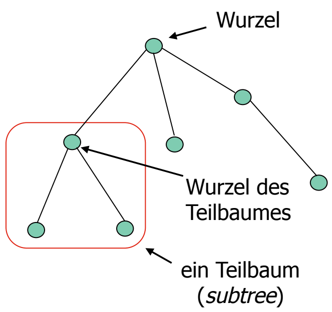


- Pfad = Folge unterschiedlicher, durch Kanten verbundener Knoten
- Wurzel = ausgezeichneter Knoten, der keine Vorgänger hat
- Blatt = Knoten ohne Nachfolger
- Vater = Vorgänger eines Knotens
- Kind = Nachfolger eines Knotens
- Innerer Knoten = Nicht-Blatt
- Geschwister = Knoten mit gleichem Vater



- Grad eines Knotens = Anzahl von direkten Söhnen
- Ordnung = maximaler Grad aller Knoten ("Baum der Ordnung n" = "n-ary tree")
- geordnet → Reihenfolge unter Geschwistern (gemäß irgend einer Ordnungsrelation)
- Teilbaum = Knoten mit all seinen Nachfolgern (direkte & indirekte)
- Linker Teilbaum = linker Sohn + Teilbaum, der daran hängt
- Level eines Baumes





Baumtiefe

- Definition: Tiefe eines Knotens
  - Länge des Pfades von der Wurzel zu dem Knoten
  - Ist eindeutig, da es nur einen Pfad bei Bäumen gibt
  - Dabei zählt man die Knoten entlang des Pfades
    - Wurzel = Tiefe 1 (manchmal auch Tiefe 0)
    - 1. Schicht = Tiefe 2, etc.
- Definition: Tiefe eines Baumes
  - leerer Baum: Tiefe 0
  - ansonsten: Maximum der Tiefe seiner Knoten

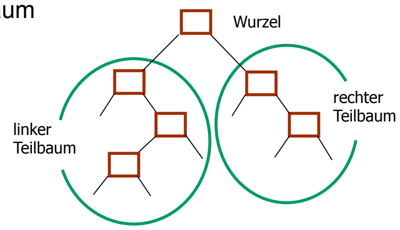
Eigenschaften

1. Von der Wurzel gibt es zu jedem Knoten genau einen Pfad
2. Für je zwei verschiedene Knoten existiert genau ein Pfad, der sie verbindet.
   $\Rightarrow$ jeder beliebige Knoten kann Wurzel sei
3. Ein Baum mit n Knoten hat n-1 Kanten

- Beweis von Eigenschaft 3 durch Induktion:
  - Induktionsanfang: n=1 → 0 Kanten
  - Induktionsschritt: n>1
    - Baum hat k Kinder, mit je n_i Knoten, wobei $n_1 + \ldots + n_k = n-1$
    - Per Induktionsannahme hat jeder Teilbaum n_i-1 Kanten
    - Zusammen also n-1-k Kanten
    - Dazu k Kanten von den Wurzeln der Teilbäume zur Wurzel → Behauptung

Binärbäume

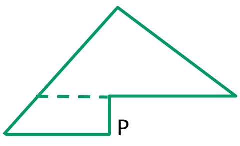
- Wichtiger Spezialfall: jeder Knoten hat höchstens zwei Kinder
  - = Baum der Ordnung 2 = Binärbaum



- Wichtige (einfache) Eigenschaft:
  In einem Baum, in dem jeder Knoten entweder genau 2 Kinder hat oder keines (Blatt), gilt:
  # Blätter = # innerer Knoten + 1

Vollständige Bäume

- Definition:
  Ein vollständiger Baum ist ein binärer Baum B mit folgenden Eigenschaften:
  - für jedes k mit k < Tiefe(B) gilt, die k-te Schicht ist voll besetzt; und,
  - die letzte Schicht ist von links nach rechts bis zu einem Knoten P besetzt
- Achtung: manchmal abweichende Def., wonach jede Schicht voll besetzt sein muß!

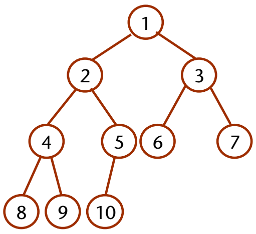


- Die Höhe eines vollständigen binären Baumes mit n Knoten ist

$$\lceil \log_2(n+1) \rceil$$

Nummerierung der Knoten

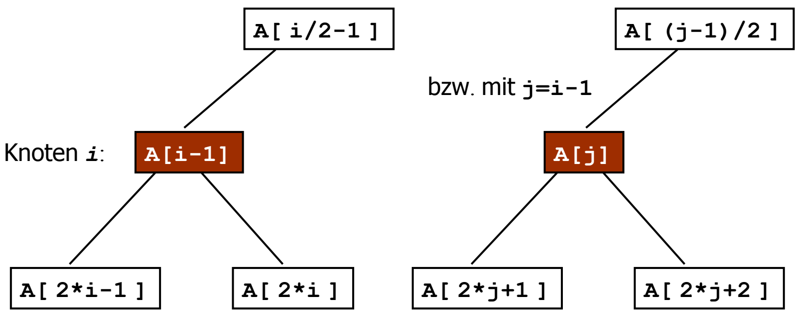
- Von oben nach unten, von links nach rechts, beginnend bei 1
- Beobachtung:
  - ein Knoten i hat immer die Nachfolger 2i und 2i+1
  - Vater hat immer die Nummer ⌊i/2⌋



- Fazit: Knoten können in einem Array abgelegt werden
- Achtung:
  - Array-Indizierung beginnt bei 0, aber Knoten-Nummerierung bei 1!
  - Knoten i = Array-Element A[i-1]
- Frage: funktioniert ein ähnliches Schema auch, wenn man die Knoten selbst mit 0 beginnend nummeriert?

Speichern eines vollständigen Baumes im Array

- Aus Sicht des Knotens *i* (Adresse ist nicht als Referenz im Knoten gespeichert)

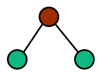
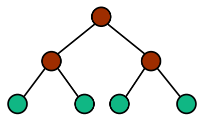


Nummerierung beginnt bei 1 Nummerierung beginnt bei 0

- Alternative: A[0] frei lassen, A[1] speichert Knoten Nummer 1

Maximale Anzahl Knoten

Wie groß ist die maximale Anzahl der Knoten eines vollständigen Baumes gegebener Höhe?

Baum	Höhe	Anzahl innere Knoten	Anzahl Blätter
	1	0	1
	2	1	2
	3	3	4
	4	7	8
	h	$2^{h-1}-1$	2^{h-1}

$$\underbrace{2^{h-1}-1 \quad 2^{h-1}}_{\Sigma = 2^h-1}$$