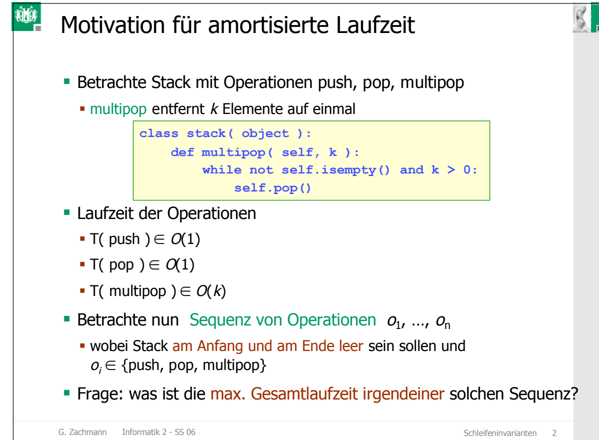
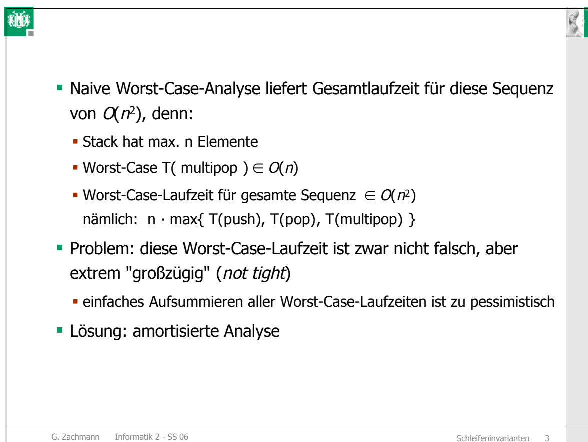
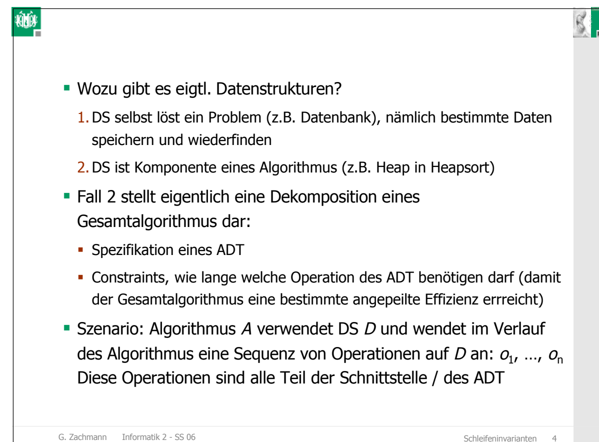
Informatik II
Fibonacci-Heaps &
Amortisierte Komplexität
G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de


Motivation für amortisierte Laufzeit
Betrachte Stack mit Operationen push, pop, multipop
multipop entfernt k Elemente auf einmal
class stack(object):
def multipop(self, k):
while not self.isempty() and k > 0:
self.pop()
Laufzeit der Operationen
T(push) ∈ O(1)
T(pop) ∈ O(1)
T(multipop) ∈ O(k)
Betrachte nun Sequenz von Operationen o1, …, on
wobei Stack am Anfang und am Ende leer sein sollen und
oi ∈ {push, pop, multipop}
Frage: was ist die max. Gesamtlaufzeit irgendeiner solchen Sequenz?
G. Zachmann Informatik 2 - SS 06
Schleifeninvarianten 2


Naive Worst-Case-Analyse liefert Gesamtlaufzeit für diese Sequenz von O(n2), denn:
Stack hat max. n Elemente
Worst-Case T(multipop) ∈ O(n)
Worst-Case-Laufzeit für gesamte Sequenz ∈ O(n2)
nämlich: n · max{ T(push), T(pop), T(multipop) }
Problem: diese Worst-Case-Laufzeit ist zwar nicht falsch, aber extrem "großzügig" (not tight)
einfaches Aufsummieren aller Worst-Case-Laufzeiten ist zu pessimistisch
Lösung: amortisierte Analyse
G. Zachmann Informatik 2 - SS 06
Schleifeninvarianten 3


Wozu gibt es eigtl. Datenstrukturen?
1. DS selbst löst ein Problem (z.B. Datenbank), nämlich bestimmte Daten speichern und wiederfinden
2. DS ist Komponente eines Algorithmus (z.B. Heap in Heapsort)
Fall 2 stellt eigentlich eine Dekomposition eines Gesamtalgorithmus dar:
Spezifikation eines ADT
Constraints, wie lange welche Operation des ADT benötigen darf (damit der Gesamtalgorithmus eine bestimmte angepeilte Effizienz errreicht)
Szenario: Algorithmus A verwendet DS D und wendet im Verlauf des Algorithmus eine Sequenz von Operationen auf D an: o1, …, on
Diese Operationen sind alle Teil der Schnittstelle / des ADT
G. Zachmann Informatik 2 - SS 06
Schleifeninvarianten 4

Amortisierte Laufzeit

- Damit A im Worst-Case effizient ist, ist es nicht notwendig, daß $\forall o_i \in$ ADT: T(o_i) ist effizient;
- es genügt, daß

$$\forall \text{ Sequenzen } o_1, \ldots, o_n : \sum_{i=1}^{m} T(o_i) \text{ effizient}$$

- Definition: Sei ein ADT D mit einer Menge Operationen o_i gegeben, seien $A(o_i) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "Laufzeitfunktionen". Wenn nun gilt

$$\forall m \, \forall \text{ Sequenzen } o_1, \ldots, o_m : \sum_{i=1}^{m} T(o_i) \leq \sum_{i=1}^{m} A(o_i),$$

dann heißen die A(o_i) amortisierte Worst-Case-Laufzeiten.

- Bemerkungen:
  - Amortisierte Laufzeit ist keine Avergarge-Case-Analyse!
    - kein Mittelwert über alle möglichen Eingaben (z.B. Quicksort)
    - kein Mittelwert über alle möglichen, zufälligen Entscheidungen eines Algorithmus (Skipliste)
  - Amortisierte Laufzeit erlaubt uns, der einen Operation etwas mehr Laufzeit zuzuschieben als sie wirklich hat und einer anderen dafür etwas abzuziehen
  - diese Technik kam Ende der 80er Jahre und führte zu vielen neuen effizienten Algorithmen
- Es gibt 3 Methoden, um amortisierte Analyse durchzuführen:
  - Aggregatmethode
  - Bankkonto-Paradigma
  - Potentialmethode

Bankkonto-Paradigma

- Engl.: *accounting method*
- Manche Operationen bekommen höhere, mache niedrigere Kosten zugewiesen, als sie eigentlich verursachen
  - verwende "Bankkonto" zur Buchhaltung
    - typischerweise mehrere Konten, die bestimmten Elementen der DS zugewiesen werden
  - amortisierte Kosten einer Operation = tatsächliche Kosten (Laufzeit) ± "Guthaben" vom Bankkonto
    - tatsächliche Kosten > amortisierte Kosten ⇔ Guthaben wird vom Konto verbraucht
    - tatsächliche Kosten < amortisierte Kosten ⇔ Guthaben wird auf Konto eingezahlt (für später)

Beispiel Stack

- Tatsächliche Kosten der Operationen:
  T(push) = 1, T(pop) = 1, T(multipop) = k
- Amortisierte Analyse:
  - verwende pro Element auf dem Stack ein Konto
    - weise diesen (kraft unserer Intuition) folgende amortisierte Kosten zu:
      A(push): 1 + 1
      A(pop): 0
      A(multipop): 0
    - dann gilt: $\sum A(o_i) \leq \sum T(o_i)$

- Beweis:
  - Stack ist am Anfang und am Ende leer
  - für jede beliebige Sequenz $o_1, \ldots, o_m$ kann man $\sum T(o_i)$ (hier) leicht ausrechnen, da jedes Element genau einmal gepusht und wieder gepopt werden kann $\rightarrow \sum T(o_i) = 2k$, k = #Push-Operationen in der Sequenz
  - $\sum A(o_i) = 2k \rightarrow$ Beh.
- Also: amortisierte Kosten

Operation	Worst-Case	Worst-Case amortisiert
push	$O(1)$	$O(1)$
pop	$O(1)$	$O(1)$
multipop	$O(n)$	$O(1)$

  - mit n = Anzahl Elemente auf dem Stack

Fibonacci-Heaps und deren amortisierte Kosten

Erinnerung: P-Queues

- Bekannte Datenstrukturen zum chronologischen Einfügen und Entnehmen von Elementen: Stack (LIFO = "last in - first out"), Queue (FIFO = "first in - first out")
- Erinnerung: *Priority Queue* (P-Queue)
  - Elemente erhalten beim Einfügen einen Wert für ihre Priorität
  - es soll immer das Element mit höchster Priorität entnommen werden
  - Veranschaulichung: "To-do"-Liste
- Ein Element (Knoten) enthält den eigentlichen Inhalt sowie die ihm zugeordnete Priorität
- Priorität ist meist ein Integer oder Float (wobei eine kleinere Zahl für eine höhere Priorität steht)

```
class QueueElement:
  Object content;     # Inhalt
  int key;            # Priorität
```


Operationen

- Kernoperationen:
  - ein neues Element hingefügen (zusammen mit seiner Priorität)
  - das Element mit der höchsten Priorität (niedrigster Zah) entfernen
- Weitere Operationen, die man bei P-Queues oft braucht:
  - Rückgabe des Elements mit höchster Priorität (ohne Entfernen)
  - ein gegebenes Element "wichtiger" machen, d.h. seine Priorität erhöhen
  - ein gegebenes Element wird überflüssig, d.h. es wird entfernt
  - zwei P-Queues zusammenfügen

Das API

- Operationen einer P-Queue) *Q:*
  - `Q.insert(object o, int p):` füge ein neues Element mit Priorität *p* ein
  - `Q.accessmin():` gib das Element mit der höchsten Priorität (= niedrigstem Schlüssel *p*) zurück
  - `Q.deletemin():` entferne das Element mit dem niedrigsten Schlüssel (= der höchsten Priorität) und liefere dieses zurück
  - `Q.decreasekey(object o, int p):` setze den Schlüssel von Element *o* auf den Wert *p* herab
  - `Q.delete(object o):` entferne Element *o*
  - `Q.merge(PQueue P):` vereinige *Q* mit P-Queue *P*
  - `Q.isEmpty():` gibt an, ob *Q* leer ist
- Bemerkung: Die effiziente Suche nach einem bestimmten Element oder Schlüssel wird in P-Queues nicht unterstützt! Für `decreasekey()` und `delete()` muß man das entsprechende Element also bereits kennen bzw. Zugriff darauf haben. Die Queue muß dann intern sich allerdings (möglichst effizient) re-organisieren.

Implementationsmöglichkeit 1: Liste

- Idee: Doppelt verkettete zirkuläre Liste mit zusätzlichem Zeiger auf das Minimum (= Knoten mit minimalem Schlüssel)
- Operationen
  - insert: neues Element irgendwo einfügen und (falls nötig) den Minimum-Zeiger aktualisieren
  - accessmin: gib den Minimalknoten zurück
  - deletemin: entferne den Minimalknoten, aktualisiere den Minimum-Zeiger (laufe durch Liste)
  - decreasekey: setze den Schlüssel herab und aktualisiere den Minimum Zeiger
  - delete: falls der zu entfernende Knoten der Minimalknoten ist, führe deletemin aus, ansonsten entferne den Knoten
  - merge: hänge die beiden Listen aneinander

7 ⇄ 15 ⇄ 9 ⇄ 2 ⇄ 31 ⇄ 12

Implementationsmöglichkeit 2: Heap

- Idee: Speichere die Elemente in einem heap-geordneten Array (vgl. Heap-Sort)
  - hier soll das Minimum ganz oben im Heap stehen
- Operationen:
  - insert: füge das neue Element an der letzten Stelle ein und stelle durch Vertauschungen die Heapordnung wieder her
  - accessmin: der Minimalknoten steht immer an der ersten Position
  - deletemin: ersetze das erste Element durch das letzte, dann versickere
  - decreasekey: setze den Schlüssel herab und stelle durch Vertauschungen die Heapordnung wieder her
  - delete: ersetze das entfernte Element durch das letzte, dann versickere
  - merge: füge alle Elemente des kleineren Heaps nacheinander in den größeren ein

2	7	12	31	9	15

Vergleich der beiden Implementationen

	lineare Liste	Heap	???
insert	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$
accessmin	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
deletemin	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
decreasekey	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$
delete	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
merge	$O(1)$	$O(m \log(n+m))$	$O(1)$

- Lassen sich die Vorteile von Listen und Heaps verbinden?
- Antwort: ja, allerdings "nur" mit amortisierter Laufzeit

Fibonacci-Heaps: Idee

- Liste von Bäumen (beliebigen Verzweigungsgrades), die alle heap-geordnet sind

- Definition: Ein Baum heißt heap-geordnet, wenn der Schlüssel jedes Knotens größer oder gleich dem Schlüssel seines Mutterknotens ist (sofern er eine Mutter hat)
- Die Wurzeln der Bäume sind in einer doppelt verketteten, zirkulären Liste miteinander verbunden (Wurzelliste)
- Der Einstiegspunkt ist ein Zeiger auf den Knoten mit minimalem Schlüssel

Exkurs: Bäume

- Bäume lassen sich als Verallgemeinerung von Listen auffassen:
  - es gibt genau ein Anfangselement („Wurzel")
  - jedes Element (außer der Wurzel) ist Nachfolger von genau einem Knoten
  - jedes Element kann beliebig viele Nachfolger („Söhne") haben

Repräsentation von Bäumen

- Bei Bäumen mit hohem Verzweigungsgrad ist es aus Speicherplatzgründen ungünstig, in jedem Knoten Zeiger auf alle Söhne zu speichern.

```
class TreeNode {
  int key;
  TreeNode children[];
}
```


- Eine platzsparende Alternative ist die Child-Sibling-Darstellung:
  - alle Söhne sind in einer Liste untereinander verkettet, dadurch genügt es, im Vaterknoten einen Zeiger auf den ersten Sohn zu speichern

```
class TreeNode {
  int key;
  TreeNode child;
  TreeNode sibling;
}
```


Child-Sibling-Repräsentation

- Um sich im Baum auch aufwärts bewegen zu können, fügt man einen Zeiger auf den Vaterknoten hinzu
- Um das Entfernen von Söhnen (und das Aneinanderhängen von Sohn-Listen) in $O(1)$ zu realisieren, verwendet man doppelt verkettete zirkuläre Listen
- Also hat jeder Knoten 4 Zeiger: child, parent, left, right

- Detaillierte Darstellung

- Vereinfachte Darstellung

Lassen wir im folgenden auch meistens weg

Das Knotenformat in Fibonacci-Heaps

```
class FibNode {
    Object content;          // der eigentliche Inhalt
    int key;                 // Schlüssel (Priorität)
    FibNode parent, child;   // Zeiger auf Vater und einen Sohn
    FibNode left, right;     // Zeiger auf linken und rechten
                             // Nachbarn
    int rank;                // Anzahl der Söhne dieses Knotens
    boolean mark;            // Markierung
}
```

- Die Zahl **rank** gibt an, wie viele Söhne der Knoten hat (= der Rang des Knotens)
- Die Bedeutung der Markierung **mark** wird später deutlich. Diese Markierung gibt an, ob der Knoten bereits einmal einen seiner Söhne verloren hat, seitdem er selbst zuletzt Sohn eines anderen Knotens geworden ist

Die "einfachen" Operationen

- **Q.accessmin():** gib den Knoten **Q.min** zurück (bzw. **NULL**, wenn *Q* leer ist)
- **Q.insert(int k):** erzeuge einen neuen Knoten *N* mit Schlüssel *k* und füge ihn in die Wurzelliste von *Q* ein. Falls *k* < **Q.min.key**, aktualisiere den Minimum-Zeiger (setze **Q.min** = N), gib den neu erzeugten Knoten zurück

Manipulation von Bäumen in Fibonacci-Heaps

- Zur Implementierung der übrigen Operationen auf Fibonacci-Heaps benötigen wir drei Basis-Methoden zur Manipulation von Bäumen in Fibonacci-Heaps:
  - link = "Wachstum" von Bäumen: zwei Bäume werden zu einem neuen verbunden
  - cut = "Beschneiden" von Bäumen im Inneren: ein Teilbaum wird aus einem Baum herausgetrennt und als neuer Baum in die Wurzelliste eingefügt
  - remove = "Spalten" von Bäumen an der Wurzel: entfernt die Wurzel eines Baums und fügt die Söhne der Wurzel als neue Bäume in die Wurzelliste ein

Baummanipulation link

- Input: 2 Knoten mit demselben Rang *k* in der Wurzelliste
- Methode: vereinige zwei Bäume mit gleichem Rang, indem die Wurzel mit größerem Schlüssel zu einem neuen Sohn der Wurzel mit kleinerem Schlüssel gemacht wird.
- Nachbedingung: die Gesamtzahl der Bäume verringert sich um 1, die Knotenzahl ändert sich nicht
- Output: 1 Knoten mit Rang *k*+1
- Laufzeit: *O*(1)

Baummanipulation cut

- Input: 1 Knoten, der nicht in der Wurzelliste ist
- Methode: trenne den Knoten (samt dem Teilbaum, dessen Wurzel er ist) von seinem Vater ab und füge ihn als neuen Baum in die Wurzelliste ein.
- Nachbedingung: die Gesamtzahl der Bäume erhöht sich um 1, die Knotenzahl ändert sich nicht
- Laufzeit: *O*(1)

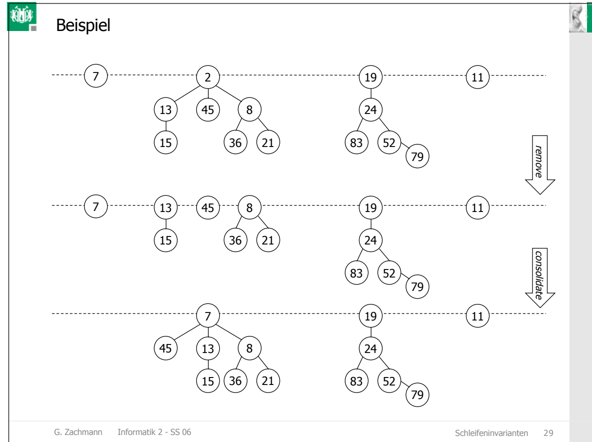
Baummanipulation remove

- Input: 1 Knoten mit Rank *k* aus der Wurzelliste
- Methode: entferne die geg. Wurzel des Baums und füge statt dessen deren *k* Söhne in die Wurzelliste ein
- Nachbedingung: die Zahl der Bäume erhöht sich um *k*-1, die Gesamtzahl der Knoten verringert sich um 1
- Laufzeit: *O*(1) (sofern die Vaterzeiger der Söhne nicht gelöscht werden!)
- Weitere Operationen: mit Hilfe der drei Manipulationsmethoden `link`, `cut`, `remove` lassen sich die noch fehlenden Operationen `deletemin`, `decreasekey`, `delete` beschreiben

Entfernen des minimalen Knotens (`deletemin`)

1. Entferne den Minimalknoten (mit `remove`).
2. "Konsolidiere" die Wurzelliste:
   - verbinde (mit `link`) je zwei Wurzelknoten mit demselben Rang, und zwar solange, bis nur noch Knoten mit unterschiedlichem Rang in der Wurzelliste vorkommen
   - füge den größeren unter dem kleineren ein, damit Heap-Eigenschaft erhalten bleibt
   - entferne dabei evtl. vorhandene Vaterzeiger der (ehem.) Wurzelknoten
3. Finde unter den verbliebenen Wurzelknoten das neuen Minimum
4. Gib den entfernten Knoten zurück

Beispiel



Weitere höhere Operationen

- **`merge`:**
  1. hänge Wurzelliste von Q an Wurzelliste von P
  2. aktualisiere Minimum-Zeiger von P: falls `P.min.key < Q.min.key`, setze `Q.min = P.min`
- **`decreasekey`, `delete`**, und **`merge`**:
  "we refer the interested reader to …"

Laufzeiten

	lineare Liste	Heap	Fibonacci-Heap
insert	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$
accessmin	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
deletemin	$O(n)$	$O(\log n)$	?
decreasekey	$O(1)$	$O(\log n)$	?
delete	$O(n)$	$O(\log n)$	?
merge	$O(1)$	$O(m \log(n+m))$	$O(1)$

Laufzeitanalyse von `deletemin`

- Laufzeit von `deletemin()`:
  1. remove: O(1)
  2. consolidate: ?
  3. updatemin: O(#Wurzelknoten nach consolidate)
- Nach dem Konsolidieren gibt es von jedem Rang nur noch höchstens einen Wurzelknoten
- Definiere maxRank(n) als den höchstmöglichen Rang, den ein Wurzelknoten in einem Fibonacci-Heap der Größe n haben kann (Berechnung von maxRank(n) später)
- Nun müssen wir die Komplexität von consolidate bestimmen

Konsolidieren der Wurzelliste

- Wie kann man das Konsolidieren effizient realisieren?
- Beobachtungen:
  - jeder Wurzelknoten muß mindestens einmal betrachtet werden
  - am Ende darf es für jeden möglichen Rang höchstens einen Knoten geben
- Idee:
  - trage die Wurzelknoten der Reihe nach in ein temporäres Array (das sog. "Rang-Array") ein
  - jeder Knoten wird an der Arrayposition eingetragen, die seinem Rang entspricht (ähnlich wie bei Count- und Bucket-Sort)
  - ist eine Position schon besetzt, so weiß man, daß es einen weiteren Knoten mit demselben Rang gibt, kann diese beiden mit `link` verschmelzen und den neuen Baum an der nächsthöheren Position im Array eintragen; dort wiederholt sich der link-Vorgang eventuell

Beispiel: consolidate

Rang-Array:

0	1	2	3	4	5
7	13	7			

7 13 45 8 19 11
45 15 36 21 24
83 52 79

7 8
45 13 36 21
15

7 19 11
45 13 8 24
15 36 21 83 52 79

Analyse von consolidate

```
rankArray = (maxRank(n)+1) * [None]        # erstelle Array
for N in "list of nodes of rootlist":
    while rankArray[N.rank] != None:       # Pos. besetzt
        r_old = N.rank
        N = link( N, rankArray[N.rank] )   # verbinde Bäume
        rankArray[r_old] = None            # lösche alte Pos.
    rankArray[N.rank] = N
```

- Sei k = #Wurzelknoten vor dem Konsolidieren
- Diese k Knoten lassen sich aufteilen in
  W = {Knoten, die am Ende noch in der Wurzelliste sind}
  L = {Knoten, die an einen anderen Knoten angehängt wurden}
- Es gilt: $|W| + |L| = k$ und
  $T(\text{consolidate}) = T(W) + T(L) + c \cdot \text{maxRank}(n)$

Gesamtkosten von `deletemin`

remove	$O(1)$	
Erstellen des Rank-Arrays	$O(\text{maxRank}(n))$	consolidate
link-Operationen	$\lvert L \rvert \cdot O(1)$	consolidate
restl. Eintragungen	$O(\text{maxRank}(n))$	consolidate
Update Minimum-Zeiger	$O(\text{maxRank}(n))$	
Gesamtkosten	$O(\lvert L \rvert + \text{maxRank}(n))$	

Amortisierte Analyse

- Beobachtung: bei `deletemin` beeinflusst die Zahl der `link`-Operationen die tatsächliche Laufzeit
- Idee: spare dafür Guthaben an (Bankkonto-Paradigma!)
- Wir wissen: die Kosten pro `link` sind jeweils 1€
  - sorge dafür, daß für jeden Wurzelknoten immer 1€ Guthaben vorhanden ist, mit dem sich die `link`-Operation bezahlen lässt, wenn dieser Knoten an einen anderen angehängt wird
- Wann müssen wir etwas "dazu bezahlen"?
  - neue Wurzelknoten können entstehen bei
    - insert: gib dem neu eingefügten Wurzelknoten noch 1€ dazu
    - remove: bezahle für jeden Sohn des entfernten Knotens 1€ dazu, insgesamt also bis zu maxRank(n) €

Amortisierte Kosten

- `insert:`

Erstellen des Knotens	$O(1)$
Einfügen in Wurzelliste	$O(1) + 1$
amortisierte Gesamtkosten	$O(1)$

- `deletemin:`

remove	$O(1) + O($ maxRank(n) $)$
erstellen des Rank-Arrays	$O($ maxRank(n) $)$
link-Operationen	$\|L\| \cdot O(1)$ wird vom Guthaben bezahlt!
restl. Eintragungen	$O($ maxRank(n) $)$
Update Minimum-Zeiger	$O($ maxRank(n) $)$
amortisierte Gesamtkosten	$O($ maxRank(n) $)$

Zwischenstand

- Amortisierte Kosten:
  - insert $O(1)$
  - accessmin $O(1)$
  - deletemin $O($maxRank(n)$)$
  - decreasekey $O(1)$ [o. Bew.]
  - delete $O($maxRank(n)$)$ [o. Bew.]
  - merge $O(1)$
- Noch zu zeigen: maxRank(n) $\in O(\log n)$, d.h. der maximle Rang eines Knotens in einem Fibonacci-Heap ist logarithmisch in der Größe n des Fibonacci-Heaps

Berechnung von maxRank(n)

- Erinnerung: Fibonacci-Zahlen

  $F_0 = 0, F_1 = 1$

  $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \quad \text{für } k \geq 0$

  - Die Folge der Fibonacci-Zahlen wächst exponentiell mit $F_{k+2} \geq 1.618^k$
- Es gilt außerdem:

$$F_{k+2} = 1 + \sum_{i=0}^{k} F_i$$

(Beweis durch vollständige Induktion über k)

- Lemma 1: Sei N ein Knoten in einem Fibonacci-Heap und k = rang(N). Betrachte die Söhne $C_1, \ldots, C_k$ von N in der Reihenfolge, in der sie (mit link) zu N hinzugefügt wurden. Dann gilt:
  1. rang(C_1) ≥ 0
  2. rang(C_i) ≥ i – 2, für i = 2, …, k
- Beweis:
  1. klar
  2. Als C_i zum Sohn von N wurde, waren $C_1, \ldots, C_{i-1}$ schon Söhne von N, d.h. es war rang(N) ≥ i-1.
     Durch `link` werden immer Knoten mit gleichem Rang verbunden.
     → Beim Einfügen war auch rang(C_i) ≥ i-1.
     [Durch `delete` kann C_i höchstens einen Sohn verloren haben (wegen cascading cuts), daher muß gelten: C_i.rank ≥ i – 2]

- Lemma 2: Sei N ein Knoten in einem Fibonacci-Heap und k = rang(N). Sei size(N) die Zahl der Knoten im Teilbaum mit Wurzel N. Dann gilt:
  size(N) ≥ F_{k+2} ≥ 1.618^k
  D.h., ein Knoten mit k Töchtern hat mind. F_{k+2} Nachkommen (inkl. sich selbst).
- Beweis durch Induktion:
  Definiere s_k = min{ size(N) | N mit rang(N) = k },
  d.h., s_k = kleinstmögliche Größe eines Baums mit Wurzelrang k.
  Klar: s_0 = 1 und s_1 = 2.
  Seien wieder $C_1, \ldots, C_k$ die Söhne von N in der Reihenfolge, in der sie zu N hinzugefügt wurden. Dann gilt

$$\text{size}(N) \geq s_k \geq 1 + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\text{size}(C_i)}_{\text{rang}(C_i) \geq i-2} \geq 1 + \sum_{i=1}^{k} F_i = F_{k+2} \geq 1.6818^k$$

- Satz: Der maximale Rang maxRank(n) eines beliebigen Knotens in einem Fibonacci-Heap mit n Knoten ist beschränkt durch $O(\log n)$
- Beweis:
  Sei N ein Knoten eines Fibonacci-Heaps mit n Knoten und sei k = rang(N).
  Es ist n = size(N) ≥ 1.618^k (nach Lemma 2)
  Daher ist $k \leq \log_{1.618}(n) \in O(\log n)$

Zusammenfassung

Operation	lineare Liste	Heap	Fibonacci-Heap
insert	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$
accessmin	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
deletemin	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$*
decreasekey	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$*
delete	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$*
merge	$O(1)$	$O(m \log(n+m))$	$O(1)$

* amortisierte Kosten