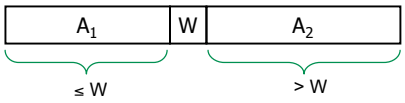
- Konstruktion der Partition: eigentliche Kunst / Arbeit bei Quicksort

1. Wahl eines Elementes W im Array (heißt Pivot-Element)
2. Suchen eines i von links mit A[i]>W
3. Suchen eines j von rechts mit A[j]≤W
4. Vertauschen von A[i] und A[j]
5. Wiederholung der Schritte bis i ≥ j-1 gilt
6. W "dazwischen" speichern

- Resultat: Partition $A=A_1WA_2$

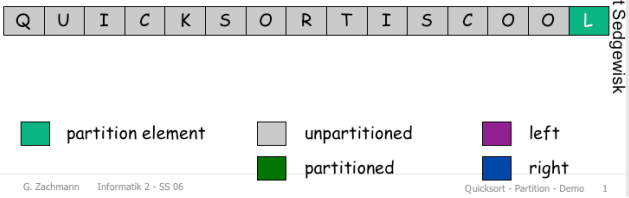


Algo-Animation

Partitioning in Quicksort

- How do we partition in-place efficiently?
  - Partition element = rightmost element.
  - Scan from left for larger element.
  - Scan from right for smaller element.
  - Exchange.
  - Repeat until pointers cross.

Courtesy Kevin Wayne & Robert Sedgewisk



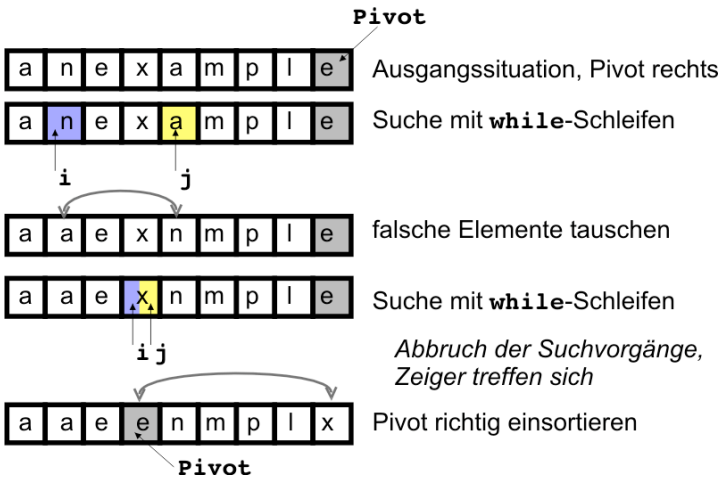
Programm

```
def quicksort( A ):                     # wrapper
   recQuicksort( A, 0, len(A)-1 )

def recQuicksort( A, links, rechts ):
    if rechts <= links :
        return                          # base case

    # find Pivot and partition array in-place
    pivot = partition( A, links, rechts )

    # sort smaller array slices
    recQuicksort( A, links, pivot-1 )
    recQuicksort( A, pivot+1, rechts )
```

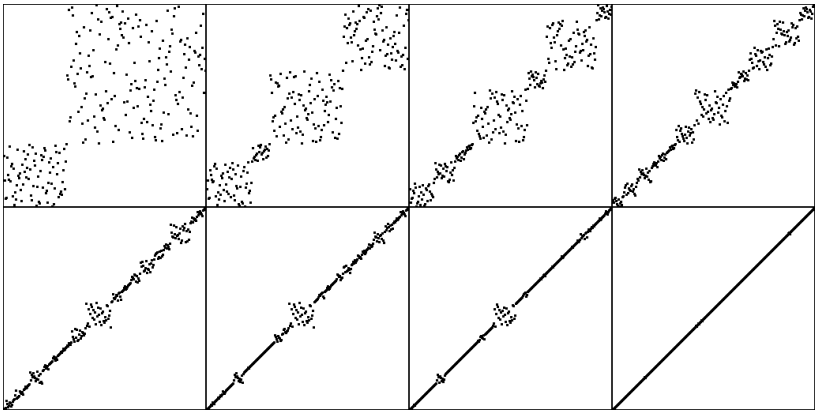


```
def partition( A, links, rechts ):
    i, j = links, rechts-1
    pivot = rechts          # choose right-most as pivot

    while i < j:            # quit when i,j "cross over"
        # find elem > pivot from left
        while A[i] <= A[pivot] and i < rechts:
            i += 1
        # find elem < pivot from right
        while A[j] > A[pivot] and j > links:
            j -= 1

        if i < j:
            # swap mis-placed elems
            A[i], A[j] = A[j], A[i]

    # put pivot at its right place and return its pos
    A[i], A[pivot] = A[pivot], A[i]
    return i
```

`Partition` bei der Arbeit



Quicksort bei der Arbeit



LO = nach der ersten Iteration, RU = fertig.
X-Achse = Index, Y-Achse = Wert in diesem Array-Element

Korrektheit der Partitionierung

- Ann.: wähle das letzte Element A_r im Teil-Array $A_{l..r}$ als Pivot
- Bei der Partitionierung wird das Array in vier Abschnitte, die auch leer sein können, eingeteilt:
  1. $A_{l..i-1}$ → Einträge dieses Abschnitts sind ≤ *pivot*
  2. $A_{j+1..r-1}$ → Einträge dieses Abschnitts sind > *pivot*
  3. A_r = *pivot*
  4. $A_{i..j}$ → Status bzgl. *pivot* ist unbekannt
- Ist eine Schleifeninvariante

- Initialisierung: vor der ersten Iteration gilt:
  - $A_{l..i-1}$ und $A_{j+1..r-1}$ sind leer – Bedingungen 1 und 2 sind (trivial) erfüllt
  - *r* ist der Index des Pivots – Bedingung 3 ist erfüllt

```
i, j = l, r-1
p = A[r]
while i < j:
    # find elem > pivot from left
    while A[i] <= p and i < r:
        i += 1
    # find elem < pivot from right
    while A[j] > p and j > l:
        j -= 1
    # swap mis-placed elems
    if i < j:
        A[i], A[j] = A[j], A[i]
[…]
```

- Erhaltung der Invariante:
  - Nach erster **`while`**-Schleife gilt: **`A[i] > p`** oder **`i=r`**
  - Nach zweiter **`while`**-Schleife gilt: **`A[j] ≤ p`** oder **`j=l`**
  - Vor **`if`** gilt: falls **`i<j`**, dann ist **`A[i] > p ≥ A[j]`**
    - was dann durch den **`if`**-Body "repariert" wird
  - Nach **`if`** gilt wieder Schleifeinvariante

```
i, j = l, r-1
p = A[r]
while i < j:
    # find elem > pivot from left
    while A[i] <= p and i < r:
        i += 1
    # find elem < pivot from right
    while A[j] > p and j > l:
        j -= 1
    # swap mis-placed elems
    if i < j:
        A[i], A[j] = A[j], A[i]
[…]
```


- Beendigung:
  - nach while-Schleife gilt:

$$i \geq j \ \wedge \ (A_i > A_r \vee i = r)$$

  - d.h.
    - $A_{l..i-1} \leq pivot$
    - $A_{i+1..r-1} > pivot$
    - $A_r = pivot$
    - der vierte Bereich , $A_{i..j}$, ist leer, oder man weiß $A_i \geq pivot$
- Die letzte Zeile vertauscht A_i und A_r:
  - *Pivot* wird vom Ende des Feldes zwischen die beiden Teil-Arrays geschoben
  - damit hat man $A_{l..i} \leq pivot$ und $A_{i+1..r} > pivot$
- Also wird die Partitionierung korrekt ausgeführt

```
i, j = l, r-1
p = A[r]
while i < j:
    […]
A[i], A[r] = A[r], A[i]
return i
```

Laufzeit des Algorithmus

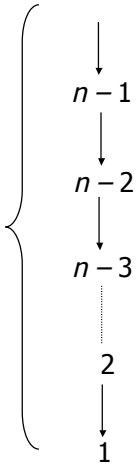
- Die Laufzeit von Quicksort hängt davon ab, ob die Partitionen ausgeglichen sind oder nicht.
- Worst-Case
  - tritt auf, wenn jeder Aufruf zu am wenigsten ausgewogenen Partitionen führt
  - eine Partitionen ist am wenigsten ausgewogen, wenn
    - das Unterproblem 1 die Größe n–1 und das Unterproblem 2 die Größe 0, oder umgekehrt, hat
    - *pivot* ≥ alle Elemente $A_{l..r-1}$ oder *pivot* < alle Elemente $A_{l..r-1}$
  - jeder Aufruf ist am wenigsten ausgewogen, wenn
    - das Array $A_{1..n}$ sortiert oder umgekehrt sortiert ist

Worst-Case-Partitionen

- Laufzeit für Worst-Case-Partitionen bei jedem Rekursionsschritt

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(0) + \text{PartitionTime}(n) \\
&= T(n-1) + \Theta(n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Theta(k) = \Theta\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&\in \Theta(n^2)
\end{aligned}
$$

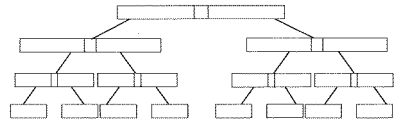
Rekursionsbaum für Worst-Case-Partitionen

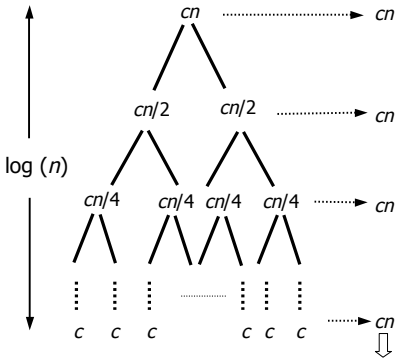


Laufzeit bei Best-Case-Partitionierung

- Größe jedes Unterproblems $\leq \frac{n}{2}$ genauer: ein Unterproblem hat die Größe $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, das andere die Größe $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$
- Laufzeit:

$$T(n) \leq 2T(\tfrac{n}{2}) + \text{PartitionTime}(n) = 2T(\tfrac{n}{2}) + cn$$





Rekursionsbaum für Best-Case-Partition

- Gesamt: $T(n) \in \Theta(n \log(n))$

Gesamt: $c \cdot n \log n$

Auswahl des Pivot-Elementes

- Pivot =
  - "central point or pin on which a mechanism turns", oder
  - "a person or thing that plays a central part or role in an activity"
- optimal wäre ein Element, das A in zwei genau gleich große Teile partitioniert (Median)
- exakte Suche macht Laufzeitvorteil von Quicksort wieder kaputt
- üblich: Inspektion von drei Elementen
  - A[li], A[re], A[mid] mit mid=(li+re)/2
  - wähle davon den Median (wertmäßig das mittlere der drei)
  - nennt man dann *"median-of-three quicksort"*
- Alternative: zufälligen Index als Pivot-Element
  - Technik: "Randomisierung"

- Beispiel, wenn man nur A[mid] als Vergleichelement nimmt:

```
SORTIERBEISPIEL
SORTIER B EISPIEL
B ORTIERSEISPIEL
```

  - schlechtest mögliche Partitionierung
- A_2 weiter sortieren:

```
ORTIERSEISPIEL
ORTIER S EISPIEL
ORLIEREEIIP S ST
```

- Beispiel, wenn mittleres Element von A[li], A[re], A[mid] als Pivot-Element verwendet wird:

```
SORTIERBEISPIEL
BEIIIEE L RTSPROS
```


Programm für Median-of-3-Quicksort

```
def median( A, i, j, k ):
    if A[i] <= A[j]:
        if A[j] <= A[k]:
            return i,j,k
        else:                           # i,k < j
            if A[i] <= A[k]:
                return i,k,j
            else:
                return k,i,j
    else:                               # j < i
        if A[i] <= A[k]:
            return j,i,k
        else:                           # j,k < i
            if A[j] <= A[k]:
                return j,k,i
            else:
                return k,j,i
```

```
def median_pivot( A, links, rechts ):
    middle = (links+rechts) / 2
    l,m,r = median( A, links, middle, rechts )
    A[l], A[m], A[r] = A[links], A[middle], A[rechts]
    return m
```

```
def median_quicksort( A, links, rechts ):
    if rechts <= links :
        return

    # find Pivot and partition array in-place
    pivot = median_pivot( A, links, rechts )
    pivot = partition( A, links+1, pivot, rechts-1  )

    # sort smaller array slices
    median_quicksort( A, links, pivot-1 )
    median_quicksort( A, pivot+1, rechts )
```


Weitere Optimierungen von Quicksort

- Beobachtung:
  - Arrays auf den unteren Levels der Rekursion sind "klein" und "fast" sortiert
  - Idee: verwende dafür Algo, der auf "fast" sortierten Arrays schneller ist → Insertionsort
- Was tun gegen quadratische Laufzeit?
  - Zähle Rekursionstiefe mit
  - Schalte auf anderen Algo um, falls Tiefe größer $c * \log(n)$ wird
  - Typ.: wähle c=2, schalte um auf Heapsort (später)

State-of-the-Art für Quicksort

- Untere Schranke:

  $C_{\max}(n) > C_{\text{av}}(n) \geq \lceil \log(n!) \rceil - 1 \approx n \log n - 1,4427n$

- Ziel: $C_{\max}(n)$ bzw. $C_{\text{av}}(n) \leq n \log n + cn$ für kleines c
- Quicksort-Verfahren
  - QUICKSORT (Hoare 1962)

    $C_{\text{av}}(n) \approx 1,386 n \log n - 2,846n + O(\log n)$
  - CLEVER-QUICKSORT (Hoare 1962)

    $C_{\text{av}}(n) \approx 1,188 n \log n - 2,255n + O(\log n)$
  - QUICK-HEAPSORT (Cantone & Cincotti 2000)

    $C_{\text{av}}(n) = n \log n + 3n + o(n)$
  - QUICK-WEAK-HEAPSORT

    $C_{\text{av}}(n) = n \log n + 0,2n + o(n)$

Quicksort = Beispiel für Divide-and-Conquer

- Anmerkung: Quicksort ist ein klassisches Divide-and-Conquer-Verfahren
  1. Divide = **`partition`**
  2. Conquer = rekursiver Aufruf (kleineres Arrays sortieren)
  3. Combine (merge) = keine Arbeit hier nötig, da die Teilarrays *in-situ* sortiert wurden

Heap

- Definition Heap :
  ist ein vollständiger Baum mit einer Ordnung ≥, für den gilt, daß jeder Vater ≥ seinen beiden Söhnen ist, d.h.,

$$\forall v : \text{left}(v) \leq v \ \wedge \ \text{right}(v) \leq v$$

Form :

und

Ordnung: **Entlang jedes Pfades von einem Knoten zur Wurzel sind die Knoteninhalte aufsteigend sortiert.**

- Spezielle Eigenschaft der Wurzel: kleinstes Element
- Achtung: keine Ordnung zwischen `left(v)`, `right(v)`!
- Obige Def → sog. "Max-Heap"; analog "Min-Heap"

Erinnerung

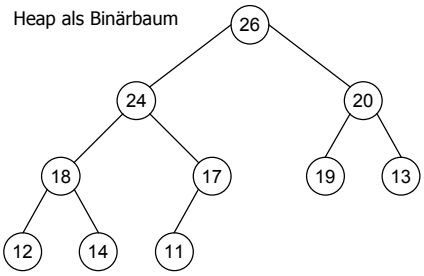
- Array betrachtet als vollständiger Baum
  - physikalisch – lineares Array
  - logisch – Binärbaum, gefüllt auf allen Stufen (außer der niedrigsten)
- Abbildung von Array-Elementen auf Knoten (und umgekehrt) :
  - Wurzel ↔ $A[1]$
  - links[i] ↔ $A[\ 2i\ ]$
  - rechts[i] ↔ $A[\ 2i+1\ ]$
  - Vater[i] ↔ $A[\ \lfloor i/2 \rfloor\ ]$

Beispiel

26	24	20	18	17	19	13	12	14	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

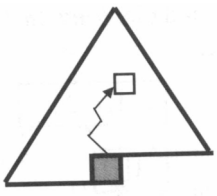
Heap als Array

Heap als Binärbaum

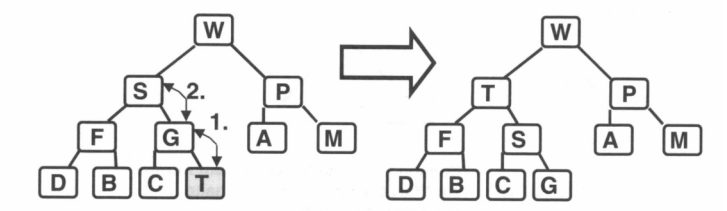


- Höhe eines Heaps: $\lfloor \lg(n) \rfloor$
- letzte Zeile wird von links nach rechts aufgefüllt

- Einfügen eines Knotens:
  - nur eine mögliche Position, wenn Baum vollständig bleiben soll
  - aber im allg. wird Heap-Eigenschaft verletzt
  - Wiederherstellen mit `UpHeap` (Algorithmus ähnlich zu Bubblesort): vergleiche Sohn und Vater und vertausche gegebenenfalls

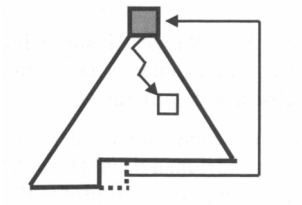


- Beispiel:

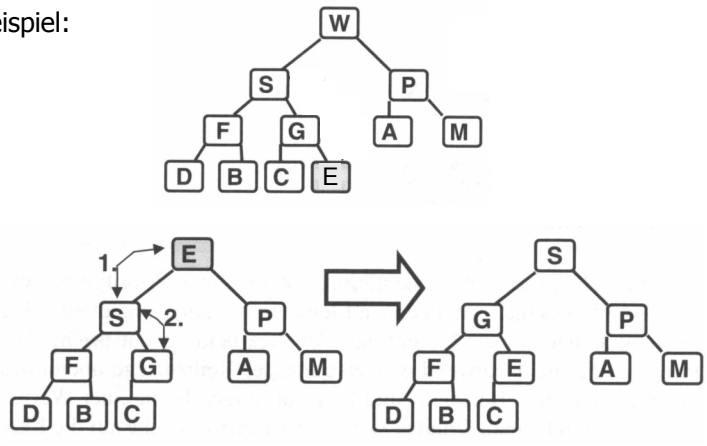


- Aufwand: O(log *N*)

- Löschen der Wurzel:
  - Ersetzen durch das am weitesten rechts stehende Element der untersten Schicht (Erhaltung der Formeigenschaft des Heaps)
  - Zustand jetzt: beide Teilbäume unter der Wurzel sind Heaps, aber gesamter Baum i.A. nicht mehr
  - Wiederherstellen der Ordnungseigenschaft mit **`DownHeap`**: Vertauschen des Vaters mit dem größeren der beiden Söhne, bis endgültiger Platz gefunden wurde



- Beispiel:



- Aufwand: **`UpHeap`** und **`DownHeap`** sind beide O(log *N*)

- Heap implementiert eine Verallgemeinerung des FIFO-Prinzips: Priority-Queue (p-Queue)
  - Daten werden entsprechend ihres Wertes, der Priorität, einsortiert
  - Daten werden nur vorne an der Wurzel (höchste Priorität) entfernt