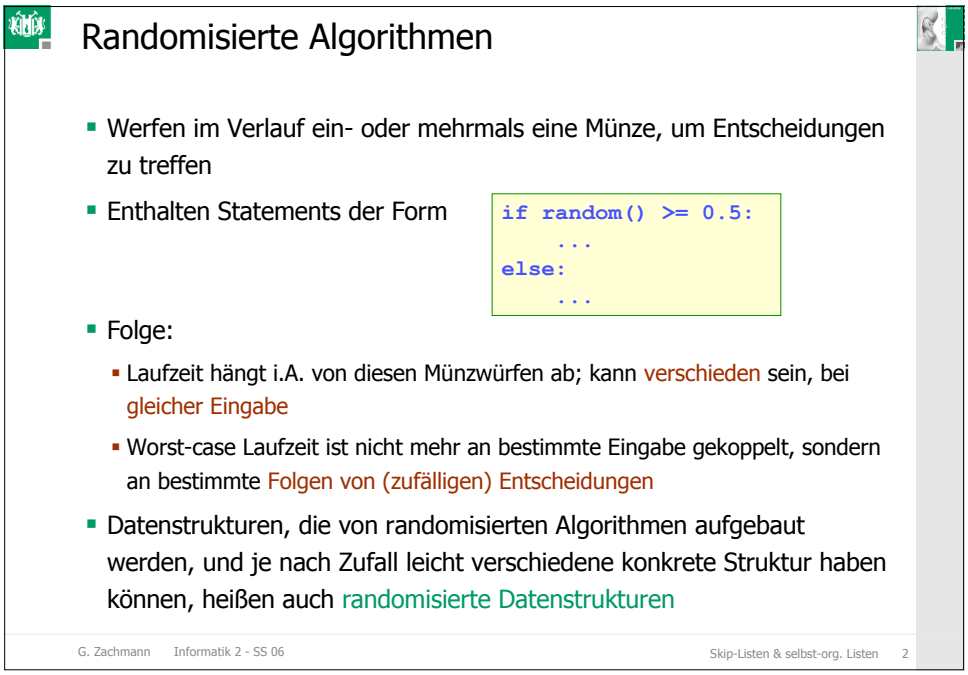
Informatik II
Skip-Lists & selbstorganisierende Listen
(als Bsp. für randomisierte Algos und selbstorganisierende Datenstrukturen)

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de



Randomisierte Algorithmen

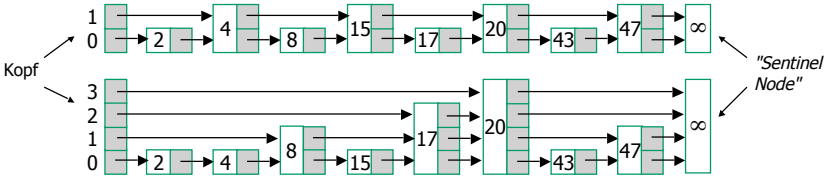
- Werfen im Verlauf ein- oder mehrmals eine Münze, um Entscheidungen zu treffen
- Enthalten Statements der Form

```
if random() >= 0.5:
    ...
else:
    ...
```

- Folge:
  - Laufzeit hängt i.A. von diesen Münzwürfen ab; kann verschieden sein, bei gleicher Eingabe
  - Worst-case Laufzeit ist nicht mehr an bestimmte Eingabe gekoppelt, sondern an bestimmte Folgen von (zufälligen) Entscheidungen
- Datenstrukturen, die von randomisierten Algorithmen aufgebaut werden, und je nach Zufall leicht verschiedene konkrete Struktur haben können, heißen auch randomisierte Datenstrukturen

Motivation

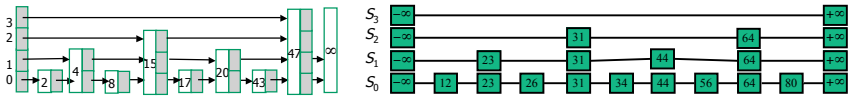
- Ausgangspunkt: Suche in geordneten Listen
  - Elemente sind nach einer Ordnungsrelation geordnet
  - binäre Suche nicht möglich, da nur sequentieller Zugriff
- Idee: Beschleunige Suche durch zusätzliche Zeiger



- Knoten haben jetzt auch eine Höhe h, h ≥ 0
- Jeder Knoten hat nicht mehr genau 1 Nachfolger und 1 Zeiger, sondern eine Liste von Zeigern (nicht Arrays gleicher Größe!)

Perfekte Skip-Listen

- Definition:
  sortierte, verkettet gespeicherte Liste mit Kopfelement (Schlüssel -∞) und Endelement (Schlüssel +∞) und:
  - Jeder 2^0-te Knoten hat Zeiger auf den nächsten Knoten mit Höhe ≥ 0
  - Jeder 2^1-te Knoten hat Zeiger auf den 2^1 entfernten Knoten mit Höhe ≥ 1
  - Jeder 2^2-te Knoten hat Zeiger auf den 2^2 entfernten Knoten mit Höhe ≥ 2
  - ...
  - Jeder 2^k-te Knoten hat Zeiger auf den 2^k entfernten Knoten mit Höhe ≥ k, $k = \lceil \log n \rceil - 1$ (n = Anzahl Knoten + 2 für Head und Tail)
  - Und: "Verankerung" der Zeiger-Ketten aller Niveaus an Head & Tail:



Größe einer perfekten Skip-Liste

- Listenhöhe (= max Höhe der Knoten) : log n
- Anzahl der Zeiger pro Listenelement ≤ log n
- Gesamtzahl der Zeiger

$$\underbrace{\lfloor \log n \rfloor + 1}_{\text{Kopf}} + \sum_{i=0}^{\log n - 1} \frac{n}{2^i} \leq \log n + 1 + 2n$$

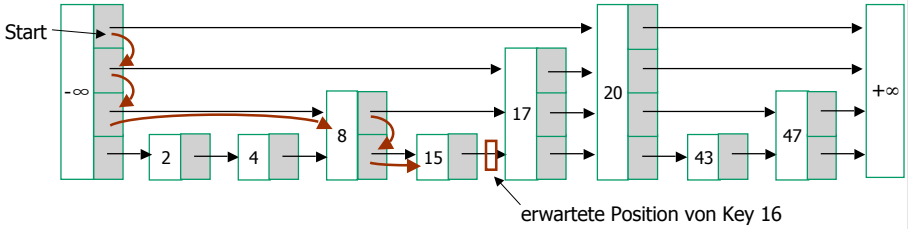
Implementation von Skip-Listen

```
class SkipListNode(object):
    """Knotenklasse für Skip-Listen"""
    def __init__(self, key, height):
        self.key = key
        self.next = (height + 1)* [None]
```

```
class SkipList(object):
    """Implementiert eine Skip-Liste"""
    def __init__(self, maxHeight):
        self.maxHeight = maxHeight    # = log n+1
        self.height = -1
        self.head = SkipListNode(-Infty, maxHeight)
        self.tail = SkipListNode( Infty, 0)
        for i in range (0, maxHeight):
            self.head.next[i] = self.tail
```

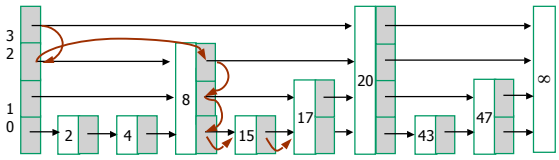
Suchen in Skip-Listen

- Wir suchen nach einem Key k in einer Skip-Liste wie folgt:
  - Wir beginnen "oben links" im Head der Skip-Liste
  - An der aktuellen Stelle p vergleichen wir k mit y ← key("next(p) on same level")
    - k = y: wir geben element(next(p)) zurück
    - k > y: wir machen "*scan forward*", d.h., p ← "next(p) on same level"
    - k < y: wir machen "*drop down*", d.h., wir betrachten den nächst-niedrigeren Level
  - Falls der Algo versucht, unter Level 0 zu gehen, liefern wir NO_SUCH_KEY




```
def search( self, k ):
    """liefert den Knoten p in der Liste mit p.key = k,
       falls es ihn gibt, und None sonst"""
    p = self.head
    for i in range( height,-1,-1 ):                # drop down
        # folge den Niveau-i-Zeigern
        while k > p.next[i].key:
            p = p.next[i]                          # scan forward
    # post-condition: p.key < k <= p.next[0].key
    p = p.next[0]
    if p.key == k:
        return p
    else
        return None
```

Perfekte Skip-Listen:
Suchen: O(log *n*) Zeit
Einfügen / Entfernen : Ω(*n*) Zeit!



Randomisierte Skip-Listen

- Aufgabe der starren Verteilung der Höhen der Listenelemente
- Anteil der Elemente mit bestimmter Höhe wird beibehalten
- Höhen werden gleichmäßig und zufällig über die Liste verteilt
- Im folgenden: Begriff Skip-Liste bedeutet immer randomisierte Skip-Liste

Initialisierung

- Eine neue Liste wird wie folgt initialisiert:

1. Ein Knoten *Head* wird erstellt und sein Key auf einen Wert gesetzt, der größer ist, als der größte Key, der in dieser Liste benutzt werden könnte (+∞)
2. Ein Knoten *Tail* wird erstellt , der Wert wird auf den kleinsten möglichen Key gesetzt (-∞)
3. Die Höhe einer solchen leeren Liste ist -1
4. Alle Vorwärtszeiger des Heads zeigen auf Tail

Einfügen in randomisierte Skip-Listen

- Gegeben: neuer Key k

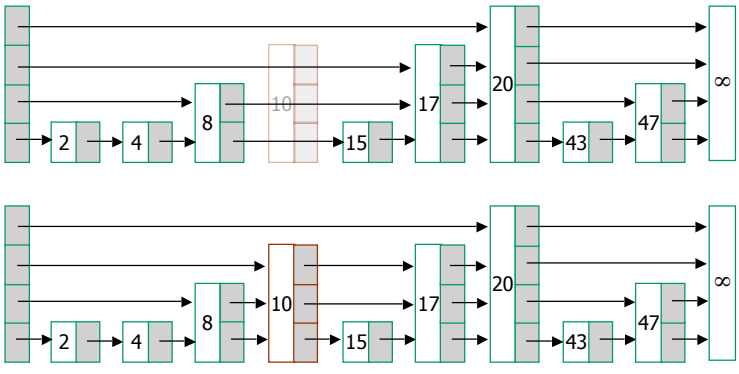
1. Suche (erfolglos) nach k; die Suche endet bei dem Knoten q mit größtem Schlüssel, der kleiner als k ist (s. Such-Algo)
2. Füge neuen Knoten p mit Schlüssel k und zufällig gewählter Höhe nach Knoten q ein
   - Wähle dabei die Höhe von p so, daß für alle i gilt:

$$P[\text{Höhe von } p = i] = \frac{\#\text{Knoten der Höhe i}}{\#\text{Knoten}} = \frac{1}{2^{i+1}}$$

3. Sammle alle Zeiger, die über die Einfügestelle hinwegweisen, in einem Array und füge p in alle Niveau-i-Listen, mit 0 ≤ i ≤ Höhe von p, ein

Beispiel

Einfügen von Schlüssel 10 mit Höhe 3



Python-Implementierung

```
def insert( self, k ):
    """fügt den Schlüssel key in Skip-Liste ein"""

    # Suche den Schlüssel k und speichere in update[i] den
    # Zeiger auf Niveau i unmittelbar vor k
    update = self.height * [None]
    p = head
    for i in range(height,-1,-1):
        while p.next[i].key < k:
            p = p.next[i]
        update[i] = p

    p = p.next[0]
    if p.key == k:
        return  # Schlüssel vorhanden

    newheight = randheight()
    if newheight > height:       # Höhe der Skip-Liste anpassen
        for i in range( height+1, newheight+1 ):
            update[i] = self.head
        self.height = newheight

    p = SkipListNode(k, newheight)
    for i in range(0, newheight+1):
        # füge p in Niveau i nach update[i] ein
        p.next[i] = update[i].next[i];
        update[i].next[i] = p;
```


Erzeugen zufälliger Höhen

```
def randheight(self):
    """ liefert eine zufällige Höhe zwischen 0 und
        maxHeight """
    height = 0
    # random() liefert zufällige Zahl aus [0,1]
    while random() <= 1/2  and  height < maxHeight:
        height += 1
    return height
```

Es gilt :

$$P[\text{randheight} = i] = \frac{1}{2^{i+1}}$$

Entfernen eines Schlüssels

- Gegeben: Schlüssel k

1. Suche (erfolgreich) nach k
2. Entferne Knoten p mit p.key = k aus allen Niveau-i-Listen mit $0 \le i \le$ Höhe von p, und adjustiere ggfs. die Listenhöhe

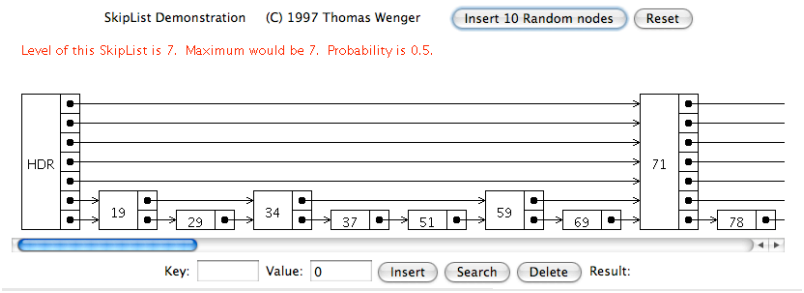

```
def delete( self, k ):
    """enfernt den Schlüssel k aus der Skip-Liste"""
    p = self.head
    update = self.height*[None]
    for i in range(height,-1,-1):
        # folge den Niveau-i Zeigern
        while p.next[i].key < k:
            p = p.next[i]
        update[i] = p

    p = p.next[0]
    if p.key != k:
        return      # Schlüssel nicht vorhanden

    for i in range(0, len(p.next)):
        # entferne p aus Niveau i
        update[i].next[i] = p.next[i]

    # Passe die Höhe der Liste an
    while self.height >= 0  and  self.head.next[height] == self.tail:
        self.height -= 1
```

Demo



Die erwartete Höhe einer Skip-Liste

- Zähle die Höhe hier ab 1
- Die Wahrscheinlichkeit, daß **`randomheight()`** den Wert h liefert, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß h-1 mal ≤½ und dann >½ auftritt
- Also ist die Wahrscheinlichkeit

$$P[\texttt{randomheigth() = h}] = \left(\frac{1}{2}\right)^h$$

- Damit gilt für die erwartete Höhe E[h] eines Knotens:

$$\begin{aligned} E[h] &= P[h=1]\cdot 1 + P[h=2]\cdot 2 + \ldots \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} h \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^h = 2 \end{aligned}$$

```
height = 1
while random() <= 1/2  and  height < maxHeight:
    height += 1
return height
```

- Lemma:
  Die erwartete Höhe H(N) einer Skip-Liste für N Elemente ist ~ log(N).

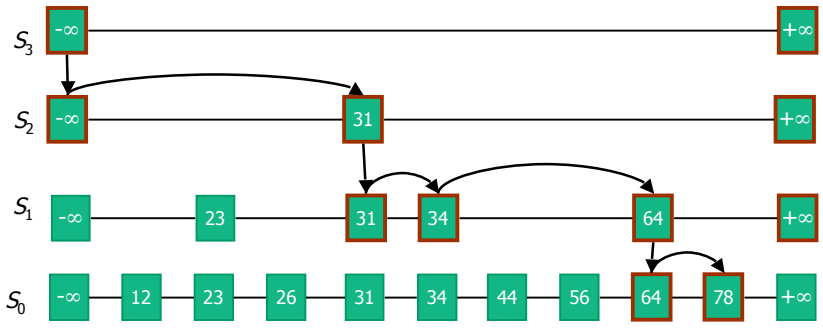
- Beweis:
  - Sei $N(h)$ die Anzahl der Elemente, die Höhe ≥ h haben, in einer Skip-Liste mit n Elementen
  - Sei $\bar{N}(h)$ der erwartete Wert für $N(h)$ (= Mittelwert, gemittelt über viele Skiplisten)
  - $\bar{N}(0) = \frac{n}{2^0} \qquad N(1) = \frac{n}{2^1} \qquad \bar{N}(2) = \frac{n}{2^2}$

    $\bar{N}(\lfloor \log n \rfloor + 1) = \frac{n}{2^{\log n + 1}} = \frac{n}{2 * n} < 1$
  - Also:

    $H(n) \leq \lfloor \log(n) \rfloor + 1$

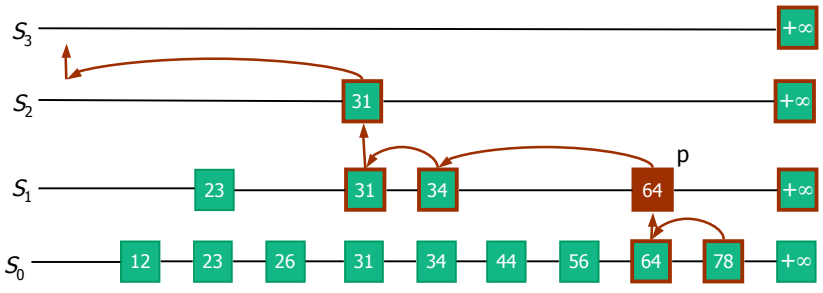
Analyse der Suche

- Zur leichteren gedanklichen Handhabung betrachten wir die Skip-Liste als Folge von (übereinander angeordneten) Listen S_i, wobei $S_{i+1} \subset S_i$
  Jeder Knoten hat Zeiger nach links, rechts, unten, und ggf. oben

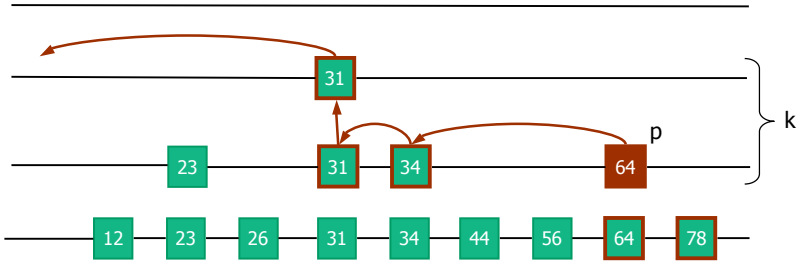


- Annahme: für Analyse nehmen wir an, dass randheight() Werte aus, 0,…, +∞ produzieren darf (weil z.B. Wahrscheinlichkeit für randheight() > 15 schon "praktisch" = 0 ist)
- Erinnerung: P[Knoten hat Höhe ≥ i] = $½^i$, i≥0
- Suche startet links oben
  - Folge Niveau-i-Zeiger von einem Element zum nächsten, oder
  - steige um ein Niveau ab
- Ende, wenn bei Niveau 0 angekommen, und
  - Key gefunden, oder
  - Element.Key < Search-Key < Next-Element.Key
- Ziel: mittlere (=erwartete) Länge des Suchpfades berechnen

- Geniale Idee: Suchpfad rückwärts verfolgen
  - Starte mit Niveau-0-Element, an dem Pfad endet
- Allgemeinere Annahme:
  - wir befinden uns innerhalb irgend eines Elements p auf Niveau i
  - Liste ist nach links unbegrenzt

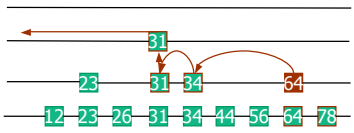


- Allgemeinere Frage: wie lang ist der Pfad von irgend einem Knoten p aus nach links im Mittel, wenn der Pfad dabei k Niveaus aufsteigt?
- Pfad besteht aus Elementstücken
  - 1 x Zeiger nach links verfolgen (selbes Niveau)
  - 1 x aufsteigen (selbes Element)



- "Rückwärts"-Algorithmus:

```
p = CurrentNode level 0 Pointer
while p != Head:
     if up(p) exists:
          p = up(p)
     else:
          p = left(p)
```



- Wahrscheinlichkeit, daß up(p) existiert, beträgt 0.5 (s. Funktion **`randomheight()`**)
- Aus diesem Grund erwarten wir, jeden Zweig der Schleife gleich oft zu durchlaufen

- Sei h(p) Höhe von Element p
- Annahme war: $h(p) \geq i$
  - `randheight` würfelt und setzt mit Wahrscheinlichkeit ½ die Höhe um 1 hoch, bzw. mit Wahrscheinlichkeit ½ die Höhe auf genau *i*
  - Also 2 Fälle, beide haben Wahrscheinlichkeit ½

1. Fall: h(p) = i
   - Suchpfad geht von p nach links zu Element p' auf Niveau i , h(p') ≥ i
   - Pfad muß immer noch *k* Niveaus hochklettern
2. Fall: h(p) > i
   - Suchpfad klettert nun mind. 1 Niveau im Element p hoch
   - Pfad muß dann nur noch k-1 Niveaus hoch

- Bezeichne EL(k) die erwartete Pfadlänge von p aus nach links und k Niveaus aufsteigend
- Rekursionsgleichung für EL(k):

$$EL(k) = \underbrace{\tfrac{1}{2}(1 + EL(k))}_{\text{Fall 1}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(1 + EL(k-1))}_{\text{Fall 2}}$$

$$\Rightarrow \qquad EL(k) = 2 + EL(k-1)$$

- Anfangsbedingung: $EL(0) = 0$
- Also: $EL(k) = 2k$

- Jetzt mittlere (= erwartete) Länge eines Suchpfades in Skip-Liste der Länge N abschätzen
- Jetzt: Pfad startet "rechts unten"
  - Zerlege Pfad in 2 Teile
  - Teil 1: starte auf Niveau 0, steige log N Niveaus auf → erwartete Länge dafür ist $2 \log N$
  - Teil 2: sei M = #Knoten mit Höhe ≥ log N
    - Wie groß ist erwarteter Wert für M?
    - $E[M] = N \cdot P[\text{Knoten hat Höhe} \geq \log n] = N \frac{1}{2^{\log N}} = 1$
    - ist der Suchpfad auf Niveau log N hochgestiegen, muß er noch höchstens 1 Zeiger bis zum Kopf-Element verfolgen (im Mittel über alle Skip-Listen der Länge N)
  - Also: erwartete (= mittlere) Suchpfadlänge ist $2 \log N + 1$

Zusammenfassung der Kosten in Skip-Listen

- Suchen dauert im Mittel $\sim 2 \log N$
- Ähnlich für Einfügen und Löschen
  - Übungsaufgabe

Häufigkeitsgeordnete Listen

- Bisherige Annahme beim Suchen in einer Liste:
  - Alle Suchanfragen gleich häufig, d.h. m.a.W.
  - Sei Key $K \in \mathcal{K}$
  - Annahme bisher war: $P[K = k_i] = \frac{1}{|\mathcal{K}|}$

  →Mittlerer (erwarteter) Aufwand für Suchen: $\frac{N}{2} \in O(N)$
- In der Praxis oft: 80/20-Regel
  - 80% der Zugriffe erfolgen auf 20% der Daten
  - von diesen 80% betreffen wiederum 80% (64% der gesamten Zugriffe) 20% von den ersten 20% (4% aller Daten) usw.
  - Folge: wenn Liste nach diesen Häufigkeiten sortiert ist, ist mittlerer Aufwand zum Suchen nur noch 0.122·N (ca. Faktor 8 besser)

- Mittlere Kosten für Suchen bei bekannter Zugriffshäufigkeit:
  - Das Array A enthalte die Daten $A_1, \ldots, A_n$
  - Sei

    $p_i = P[\text{gesuchter Key } K = A_i] = \frac{\text{Anzahl Suchanfragen mit Key } A_i}{\text{Anzahl Suchanfragen insgesamt}}$
  - Vereinfachende Annahme: Key $K \in A$
  - Kosten für (erfolgreiche) Suche nach Key A_i ist genau i
  - Dann sind die mittleren Kosten für 1 Zugriff

$$\bar{C}(n) = 1 \cdot p_1 + \ldots + n \cdot p_n$$

- Wie minimiert man $\bar{C}(n)$?
- Lösung: ordne die A_i nach Häufigkeit, so daß also

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$$

Selbstorganisierende Listen

- Problem:
  - die (relativen) Häufigkeiten der Suchanfragen sind nicht im voraus bekannt
  - die Häufigkeiten können sich im Lauf der Zeit ändern
- Lösung: baue die Liste zur Laufzeit um, basierend auf der Historie der bis dahin "gesehenen" Suchanfragen
- Genauer:
  - Gegeben: Liste A und Sequenz S von Suchanfragen $s_0 \ldots s_m$
  - Algorithmus bekommt ein s_i nach dem anderen, kann nicht in die Zukunft schauen
  - Algo bekommt nach jeder Suche s_i die Gelegenheit, die Liste A umzubauen
- Frage: welche Umbaustrategie ist die beste?

Umbau-Strategien

- FC-Regel (*Frequency count*):
  - Führe Häufigkeitszähler für jedes Element
  - Jeder Zugriff auf ein Element erhöht dessen Häufigkeitszähler um 1
  - Sortiere Liste nach Häufigkeitszähler in gewissen Abständen
- T-Regel (*Transpose*):
  - das Zielelement eines Suchvorgangs wird mit dem unmittelbar vorangehenden Element vertauscht
  - häufig referenzierte Elemente wandern (langsam) an den Listenanfang
- MF-Regel (*Move-to-Front*):
  - Zielelement eines Suchvorgangs wird nach jedem Zugriff direkt an die erste Position der Liste gesetzt
  - relative Reihenfolge der übrigen Elemente bleibt gleich
  - in jüngster Vergangenheit referenzierte Elemente sind am Anfang der Liste (Lokalität kann gut genutzt werden)

Beispiel für MF-Regel

- Gegeben Liste L = <1, 2, 3, 4, 5, 6, 7>
- Zugriffsfolge s: 1, 2, ..., 7, 1, 2, ..., 7, ..., 1, 2, ..., 7

  10 mal
- Mittlere Kosten für 1 Zugriff bei Folge s: $\frac{\sum_{i=1}^{7} i \; + \; 7 \cdot 9 \cdot 7}{10 \cdot 7} = 6.7$
- Zugriffsfolge s': 1, ..., 1, 2, ..., 2, ..., 7, ..., 7

  10 mal 10 mal 10 mal
- Mittlere Kosten für 1 Zugriff bei Folge s': $\frac{\sum_{i=1}^{7} i \; + \; 9 \cdot 7 \cdot 1}{10 \cdot 7} = 1.3$
- Fazit: MF kann besser sein als jede statische Anordnung, besonders, wenn die Zugriffe gehäuft auftreten

Beobachtungen

- MF-Regel ist "radikal", ist T-Regel evtl. besser?
- T-Regel ist "vorsichtiger", aber:
  - Betrachte L = <1, 2, ..., N-1, N> und die Zugriffsfolge N, N-1, N, N-1, ...
  - T-Regel vertauscht immer die letzten beiden Elemente
  - Resultat: die durchschnittlichen Zugriffskosten sind hier N !
- FC-Regel
  - benötigt zusätzlichen Speicherplatz
  - Sortieren kostet mindestens Zeit ~ N → Zugriffskosten sind wieder O(N)
- Experimentelle Resultate zeigen:
  - T schlechter als FC,
  - MF und FC ungefähr gleich gut
  - MF hat Vorteile

Wichtiger Satz zur *Move-to-Front*-Regel

- Sei A irgend ein anderer Algorithmus zur Selbstanordnung — er darf sogar die gesamte Sequenz von Suchanfragen, *S,* im voraus kennen
- Sei $C_{MF}(S)$ die Kosten für die Abarbeitung der Suchanfragen aus S gemäß MF-Regel (also Kosten für Suche selbst und Kosten für Umbau der Liste gemäß MF)
- Analog $C_A(S)$
- Satz [Sleator & Tarjan, 1985]:

$$C_{MF}(S) \leq 2C_A(S)$$

- Fazit:
  - MF-Regel ist höchstens doppelt so schlecht wie irgend eine andere Regel
  - MF-Regel ist also nur um kleinen Faktor schlechter als die optimale Regel!
  - Selbst Vorkenntnisse über S helfen nicht viel!