Informatik II
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

Begriffe

- Definition:
  Unter einem Zufallsexperiment versteht man einen, im Prinzip beliebig oft, wiederholbaren Vorgang mit ungewissem Ergebnis. Beobachtet wird in einem Zufallsexperiment ein Merkmal des Ergebnisses.
- Beispiele:
  - Zufallsexperimente in diesem Sinne sind:
    - der einmalige Wurf einer Münze
    - die Wartezeit am Postschalter
    - die Gewinnausschüttung an einem Spielautomaten
  - Keine Zufallsexperimente in diesem Sinne sind:
    - der Ausgang der nächsten Bundestagswahl
    - die Niederschlagsmenge am 20. Oktober 2009

Zufallsvariable und Ereignisse

- Definition Zufallsvariablen:
  Ein Merkmal wird durch Zufallsvariablen (ZV) mathematisch beschrieben. Man sagt, "die Zufallsvariable X nimmt Werte an in einer Menge Ω", wenn das von X beschriebene Merkmal nur Werte aus dem Merkmalsraum Ω annehmen kann.
- Definition diskreter/stetiger Merkmalsraum:
  Es sei X eine Zufallsvariable, die Werte in Ω annimmt.
  X heißt diskret, falls Ω abzählbar oder endlich ist, z.B. $\Omega = \mathbb{N}$ oder $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$.
  Anderenfalls heißt X stetig, z.B. $\Omega = \mathbb{R}$ oder $\Omega = R_+ = [0, \infty)$.

Beispiele

- X = "Augenzahl" ist diskrete ZV mit Werten in $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$
- X = "Anzahl der Anrufe" ist diskrete ZV mit Werten in $\Omega = \mathbb{N}_0$
- X = "Zeit [h] bis zum ersten Ausfall" ist stetige ZV $\in \Omega = [0, \infty)$
- X = (X_1 , X_2) = "Augenzahl des ersten, Augenzahl des zweiten Wurfs" ist dikrete zweidim. ZV mit Werten in
  $$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,5), (6,6)\}$$
- Y = (Y_1,…,Y_{365}) = "Niederschlagsmenge [ml] des 1. Tages im Jahr, …, Niederschlagsmenge des 365. Tages im Jahr" ist 365-dimensionale, stetige Zufallsvariable mit Werten in $\Omega = \mathbb{R}_+^{365}$
- X = (X_1,…, X_n) = "1. Wert der Stichprobe, …, n. Wert der Stichprobe" ist n-dimensionale Zufallsvariable mit Werten in $\Omega = \text{'Grundgesamtheit'}$

Ereignisse

- Definition Ereignis:
  Das Auftreten eines bestimmten Merkmals in einem bestimmten Versuch eines Zufallsexperiment heißt auch Ereignis.
- Schreibweise von Ereignissen:
  Gegeben seien eine Zufallsvariable X mit Werten in Ω,
  sowie $t \in \Omega$ und $A \subset \Omega$.
  Ausdrücke der Form
  $$[X \in A],\ \ [X = t],\ \ [X \leq t], \ldots$$
  heißen Ereignisse.
  $[X = t]$ heißt Elementarereignis,
  $[X \in \Omega]$ heißt sicheres Ereignis,
  $[X \in \varnothing]$ bezeichnet ein unmögliches Ereignis.

Beispiele

- $[X = 4]$ = "Ereignis, dass bei der Durchführung des Experimentes das Ergebnis 'Augenzahl = 4' beobachtet wird".
- $[X \in \{1, 2, 3\}] = [X \leq 3] = \text{"Augenzahl} \leq 3\text{"}$
- $[100 \leq X \leq 200]$ = "Zwischen 100 und 200 Anrufe beobachtet".
- $[X < 300.5]$ = "Maschine fällt spätestens nach 300.5 Stunden aus
- $[|X_1 - X_2|] > 5$ = "Augendifferenz betragsmäßig größer 5" (unmögliches Ereignis)
- $[X_1 + X_2 \geq 2]$ = "Augensumme mindestens 2" (sicheres Ereignis)
- $[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 10]$ = "Mittelwert der Stichprobe ≥ 10"

Ereignisse verhalten sich wie Mengen!

- Ereignisse können immer in der Gestalt $[X \in A]$, $A \subset \Omega$ geschrieben werden:
  $$[X = 3] = [X \in \{3\}],$$
  $$[X \leq t] = [X \in [0, t]],$$
  $$[X_1 < X_2] = [(X_1, X_2) \in \{(i,j) | 1 \leq i < j \leq 6\}]$$
- Ereignisse können wie Mengen verknüpft werden:
  $$[X = 4] \text{ oder } [X = 5] \ = \ [X = 4 \vee X = 5] \ = \ [X \in \{4, 5\}] \ :=: \ [X = 4] \cup [X = 5]$$
  $$[X \leq 1000] \text{ und } [X \geq 100] \ = \ [X \leq 1000 \wedge X \geq 100] \ = \ [100 \leq X \leq 1000] \ :=: \ [X \leq 1000] \cap [X \geq 100]$$

Disjunkte Ereignisse

- Definition disjunkt:
  Zwei Ereignisse heißen disjunkt, wenn sie nicht gleichzeitig eintreten können.
- Beobachtung:
  Zwei Ereignisse A und B sind genau dann disjunkt, wenn ihre Schnittmenge leer ist.
- Beispiel: Werfen zweier Würfel:
  $$[X \leq 2] \cap [X_1 + X_2 \geq 10] =$$
  $$[X_1 \leq 2 \wedge X_1 + X_2 \geq 10] =$$
  $$[(X_1, X_2) \in \{ (i,j) \in \{1, 2, \ldots, 6\}^2 \mid i \leq 2, i + j \geq 10 \}] =$$
  $$[(X_1, X_2) \in \varnothing]$$

- Es gilt $[X \in A] \subset [Y \in B]$, wenn die Beobachtung von $[X \in A]$ stets die von $[Y \in B]$ impliziert.
- Beispiel: Werfen zweier Würfel:

$$[X_1 + X_2 \geq 10] \subset [X_1 \geq 4]$$

$$[X_1 + X_2 \geq 10] \not\subset [X_1 \geq 5]$$

- Wenn außerdem X=Y gilt, dann ist $A \subset B$

Verteilung einer Zufallsvariablen

- Ein naheliegender Weg, den Begriff der Wahrscheinlichkeit zu definieren, ist der folgende:
  Das Zufallsexperiment wird n-mal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Dabei wird beobachtet, wie oft das Ereignis A eingetreten ist.
- Definition Häufigkeit:
  Wird ein Zufallsexperiment, bei dem das Merkmal durch eine Zufallsvariable X beschrieben wird, n-mal wiederholt, so beschreibt

  $h_n[X \in A]$:= Anzahl der Experimente, bei denen $[X \in A]$ beobachtet wird,

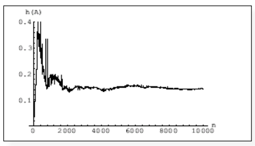
  die absolute Häufigkeit von $[X \in A]$ und

  $$H_n[X \in A] := \frac{1}{n} h_n[X \in A]$$

  die relative Häufigkeit von $[X \in A]$

- Es ist eine Erfahrungstatsache, daß die relativen Häufigkeiten mit größer werdendem Stichprobenumfang einem festen Wert zustreben, der nur von dem Ereignis $[X \in A]$ abhängt.
- Beispiel
  Betrachte beim Werfen eines Würfels das Ereignis A = „Augenzahl 6 gewürfelt" :

$$H_n(X = 6) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{6}$$



Begriffe

- Definition Verteilung:
  Der "Grenzwert" der relativen Häufigkeiten stellt die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Ereignisses dar. Die Gesamtheit aller derartigen Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Ereignisse bezeichnet man als die Verteilung der Zufallsvariablen X in dem betreffenden Experiment.
- Bezeichnung Wahrscheinlichkeit :
  X sei eine Zufallsvariable mit Werten in Ω. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $[X \in A]$ wird mit $P[X \in A]$ oder $P_X(A)$ bezeichnet.
  P_X heißt die Verteilung der Zufallsvariablen X, P_X ist eine Abbildung, die jeder Teilmenge A von Ω einen Wert aus [0,1] zuordnet.
- Die gemessenen Häufigkeiten $H_n(X \in A)$ sind Schätzungen der tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten.

Eigenschaften

- Nichtnegativität

$$h_n(X \in A) \geq 0, \text{ d.h } H_n(X \in A) \geq 0$$

- Normiertheit

$$h_n(X \in \Omega) = n, \text{ d.h. } H_n(X \in \Omega) = 1$$

- Additivität

Für $A \cap B = \varnothing$ gilt

$$h_n([X \in A] \cup [X \in B]) = h_n(X \in A) + h_n(X \in B),$$

d. h.

$$H_n([X \in A] \cup [X \in B]) = H_n(X \in A) + H_n(X \in B)$$

- Diese Eigenschaften postuliert man nun genauso für die Wahrscheinlichkeiten $P[X \in A]$ (Axiomensystem von Kolmogorov)

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeitsmaße

- Satz:
  Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in Ω. A und B seien Teilmengen von Ω. Dann gelten:

1. $P[X \in \varnothing] = 0$
2. Additivität:
   $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P\big[[X \in A] \cup [X \in B]\big] = P[X \in A] + P[X \in B]$
3. Monotonie: $A \subseteq B \Rightarrow P[X \in A] \leq P[X \in B]$
4. Aus (3) folgt insbesondere $P[X \in A] \leq 1$ für alle $A \subseteq \Omega$
5. $P[X \notin A] = 1 - P[X \in A]$

Beispiele

$$\begin{aligned} P_X(\text{"eine gerade Zahl zu würfeln"}) &= P(X \in \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) \\ &= P_X(\{2\}) + P_X(\{4\}) + P_X(\{6\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_X(\text{"eine Zahl } \geq 3 \text{ würfeln"}) &= P_X(\{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) \\ &= P_X(\{3\}) + P_X(\{4\}) + P_X(\{5\}) + P_X(\{6\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_X(\text{"keine 6 zu würfeln"}) &= 1 - P_X(\{6\}) \\ &= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Zähldichten

- Satz
  Ist X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in der abzählbaren Menge Ω, so wird die Verteilung von X durch die Festlegung der Zähldichte bestimmt:

$$P[X = k], \quad \forall k \in \Omega$$

Für beliebige Teilmengen $A \subset \Omega$ gilt:

$$P[X \in A] = \sum_{k \in A} P[X = k]$$

- Beweis
  Eine Menge A lässt sich stets als disjunkte Vereinigung ihrer einzelnen Elemente k auffassen.

  Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
P[X \in A] &= P\left[X \in \bigcup_{k \in A} \{k\}\right] = P\left[\bigcup_{k \in A} [X \in \{k\}]\right] \\
&\overset{(\sigma\text{-Additivität})}{=} \sum_{k \in A} P\left[X \in \{k\}\right] \\
&= \sum_{k \in A} P[X = k]
\end{aligned}
$$

Gleichverteilung

- Definition:
  Ist in einem Experiment mit einem endlichen Merkmalsraum Ω keiner der möglichen Merkmalswerte vor dem anderen ausgezeichnet, so ist die Verteilung der zugehörigen Zufallsvariable X die Gleichverteilung mit folgender Zähldichte:

$$P[X = k] = \frac{1}{|\Omega|}, \quad \forall k \in \Omega$$

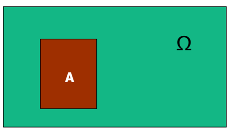
  Es gilt für $A \subset \Omega$:

$$P[X \in A] = \sum_{k \in A} P[X = k] = \sum_{k \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Veranschaulichung als Mengen

- Betrachte Ereignisse als Mengen im Gesamtraum Ω (also Flächen in der Ebene, oder Intervalle auf der reellen Achse, oder Volumen in Raum)
  - Klappt sowohl für diskrete als auch stetige Wahrscheinlichkeiten
- Dann lassen sich die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gut durch die Quotienten der Mengenmaße veranschaulichen (vgl. a. Veranschaulichungen zur Formel von Sylvester-Poincaré):

$$
\begin{aligned}
P[X \in A] &= \frac{\text{"Volumen" von } A}{\text{"Volumen" von } \Omega} \\
&= \frac{\#\text{ günstiger Fälle}}{\#\text{ möglicher Fälle}}
\end{aligned}
$$



Beispiel: Ziehung der Lottozahlen

- Es bezeichne $X = (X_1, \ldots, X_6)$ das Ergebnis einer Ziehung der Lottozahlen (ohne Zusatzzahl), so gilt:

$$|\Omega| = \text{Anzahl mögliche Ergebnisse} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13\,983\,816$$

- Damit folgt:

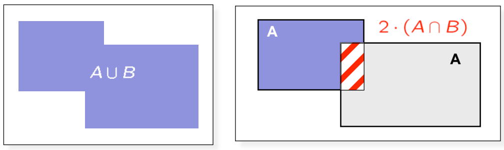
$$P\left[X = \text{'6 Richtige'}\right] = \frac{1}{13983816} \approx 0$$

- Analog läßt sich folgendes feststellen:

$$P\left[\text{'mindestens eine Richtige'}\right] > P\left[\text{'keine Richtige'}\right]$$

Formel von Sylvester–Poincaré (n = 2)

- Additionssatz:
  Für beliebige $A, B \subset \Omega$ gilt:
  $P\left[[X \in A] \cup [X \in B]\right] = P[X \in A] + P[X \in B] - P\left[[X \in A] \cap [X \in B]\right]$



Erwartungswert und Mittelwert

- Sei $X \in \Omega$ eine diskrete ZV
- Definition:
  Der Erwartungswert von X ist jener Wert, der sich bei einer oftmaligen Wiederholung des zugrunde liegenden Experiments als Mittelwert der tatsächlichen Ergebnisse ergibt.
- Bezeichnung: $E[X]$
- Falls $\Omega = \{X_1, \ldots, X_n\}$ ein endlicher Merkmalsraum ist, und falls X eine Gleichverteilung hat, dann ist der Erwartungswert gleich dem arithmetischen Mittelwert aller möglichen Werte

$$E[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Erwartungswert allgemein: falls X nicht gleichverteilt ist, so ist der Erwartungswert gleich dem gewichteten Mittel aller möglichen Werte
  - Seien die Wahrscheinlichkeiten $P[X = X_i] = p_i$ gegeben
  - Dann ist
    $$E[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot X_i$$
  - Bemerkung: i.A. ist $E[X] \notin \Omega$
- Beispiel:
  - Würfeln: $E[X] = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} i = 3.5$

Rechengesetze

- Erwartungswert der Summe mehrerer ZV:
  $$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$
- Erwartungswert bei linearer Transformation:
  $$E[aX + b] = aE[X] + b$$
- Erwartungswert des Produkts zweier stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen:
  $$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$