Informatik I
Komplexität von Algorithmen

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

Leistungsverhalten von Algorithmen

- Speicherplatzkomplexität: Wird primärer & sekundärer Speicherplatz effizient genutzt?
- Laufzeitkomplexität: Steht die Laufzeit im akzeptablen / vernünftigen / optimalen Verhältnis zur Aufgabe?
- Theorie: liefert untere Schranke, die für jeden Algorithmus gilt, der das Problem löst.
- Spezieller Algorithmus liefert obere Schranke für die Lösung des Problems.
- Erforschung von oberen und unteren Schranken: Effiziente Algorithmen und Komplexitätstheorie (Zweige der Theoretischen Informatik)

Laufzeit

- Definition:
  Die Laufzeit $T(x)$ eines Algorithmus A bei Eingabe x ist definiert als die Anzahl von Basisoperationen, die Algorithmus A zur Berechnung der Lösung bei Eingabe x benötigt.
  - Laufzeit = Funktion der Größe der Eingabe
  - Definition für Eingabegröße ist abhängig vom Problem

Laufzeitanalyse

- Sei P ein gegebenes Programm und x Eingabe für P, |x| Länge von x, und $T_P(x)$ die Laufzeit von P auf x.
- Beschreibe Aufwand eines Algorithmus als Funktion der Größe des Inputs (kann verschieden gemessen werden):
  $T_p(n)$ = Laufzeit des Programms P für Eingaben der Länge n
- Der beste Fall (best case): Oft leicht zu bestimmen, kommt in der Praxis jedoch selten vor:
  $$T_P(n) = \inf\{T_P(x) \mid |x| = n, x \text{ Eingabe für P}\}$$
- Der schlechteste Fall (worse case): Liefert garantierte Schranken, meist *relativ* leicht zu bestimmen. Oft zu pessimistisch:
  $$T_P(n) = \sup\{T_P(x) \mid |x| = n, x \text{ Eingabe für P}\}$$

Kostenmaße

- Einheitskostenmaß: Annahme, jedes Datenelement belegt unabhängig von seiner Größe denselben Speicherplatz (in Einheitsgröße).
  - Damit: Größe der Eingabe bestimmt durch Anzahl der Datenelemente
  - Beispiel: Sortierproblem
- Logarithmisches Kostenmaß (Bit-Komplexität): Annahme, jedes Datenelement belegt einen von seiner Größe (logarithmisch) abhängigen Platz
  - Größe der Eingabe bestimmt durch die Summe der Größen der Elemente
  - Erinnerung: für n>0 ist die # Bits zur Darstellung von n = $\lceil \log_2(n+1) \rceil$
  - Beispiel: Zerlegung einer gegebenen großen Zahl in Primfaktoren
- Ab jetzt immer Einheitskostenmaß

Beispiel Minimum-Suche

- Eingabe : Folge von n Zahlen (a_1, a_2, … , a_n).
- Ausgabe : Index i, so daß $a_i \le a_j$ für alle Indizes $1 \le j \le n$.
- Beispiel:
  - Eingabe: 31, 41, 59, 26, 51, 48
  - Ausgabe: 4

```
def min(A):
    min = 1
    for j in range (2, len(A))
        if A[j] < A[min]:
            min = j
```

```
def min(A):
  min = 0
  for j in range( 1, len(A) ):
    if A[j] < A[min]:
        min = j
```

	Kosten	Anzahl
	c_1	1
	c_2	n – 1
	c_3	n – 1
	c_4	n-1

- Zusammen: Zeit

$$T(n) = c_1 + (n-1)\cdot(c_2 + c_3 + c_4) \le \bar{c}\cdot n$$

  - Eingabegröße = Größe des Arrays

Weiteres Beispiel für Aufwandsberechnung

- Wir betrachten folgende Funktion f1, die 1! · 2! ⋯ (*n*-2)! · (*n*-1)! berechnet

```
def f1(n):
  r = 1
  while n > 0 :
      i = 1
      while i < n:
          r *= i
          i += 1
      n -= 1
  return r
```

n	Z(n)	V(n)	M(n)	I(n)
1	2	2	0	1
2	3	5	1	1
3	5	3	1	3
4	8	6	3	6
5	12	10	6	10
6	17	15	10	15
7	23	21	15	21
8	30	28	21	28
9	38	36	28	36
10	47	45	36	45

- Exakte Bestimmung des Aufwandes:
  - M = Anzahl Mult, I = Anzahl Inkr.,
    V = Anzahl Vergleiche, Z = Anzahl Zuweisungen

- Anzahl Mult M(n)

$$M(n) = (n-1) + M(n-1) = (n-1) + (n-2) + M(n-2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

- Anzahl der Inkrementierungen: $I(n) = n + M(n+1)$, woraus folgt:

$$I(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Die Anzahl der Vergleiche

$$V(n) = I(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- Die Anzahl benötigter Zuweisungen Z(n) ist gleich

$$Z(n) = 1 + n + I(n) = 1 + \frac{n(n+3)}{2}$$

```
r = 1
while n > 0 :
    i = 1
    while i < n:
        r *= i
        i += 1
    n -= 1
return r
```


Rechenmodell / Algorithmisches Modell

- Für eine präzise mathematische Laufzeitanalyse benötigen wir ein Rechenmodell, das definiert
  - Welche Operationen zulässig sind.
  - Welche Datentypen es gibt.
  - Wie Daten gespeichert werden.
  - Wie viel Zeit Operationen auf bestimmten Daten benötigen.
- Formal ist ein solches Rechenmodell gegeben durch die Random Accsess Maschine (RAM).
  - RAMs sind Idealisierung von 1-Prozessorrechner mit einfachem aber unbegrenzt großem Speicher.

Basisoperationen und deren Kosten

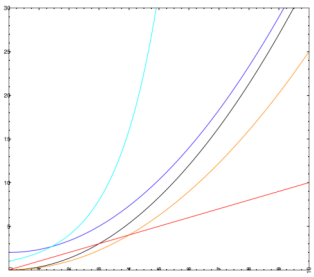
- *Definition* : Als Basisoperationen bezeichnen wir
  - Arithmetische Operationen – Addition, Multiplikation,Division, Ab-, Aufrunden. Auf Zahlen fester Länger (z.B 64 Bit = Double)
  - Datenverwaltung – Laden, Speichern, Kopieren von Datensätzen fester Größe
  - Kontrolloperationen – Verzweigungen, Sprünge, Wertübergaben.
- Kosten: Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß jede dieser Operationen bei allen Operanden gleich viel Zeit benötigt (im Einheitskostenmaß)
  - Überwiegend unabhängig von der verwendeten Programmiersprache
  - Ablesbar aus Pseudocode oder Programmstück
  - Exakte Definition ist nicht bedeutend

Beispiele

- einen Ausdruck auswerten
- einer Variablen einen Wert zuweisen
- Indizierung in einem Array
- Aufrufen einer Methode / Funktion
- Verlassen einer Methode / Funktion

Beispiel für Wachstum von Funktionen

$f_1(n) = \frac{1}{3}n^2,$
$f_2(n) = \frac{1}{4}n^2,$
$f_3(n) = n,$
$f_4(n) = \frac{1}{3}n^2 + 2,$
$f_5(n) = 2^n.$



Funktionenklassen

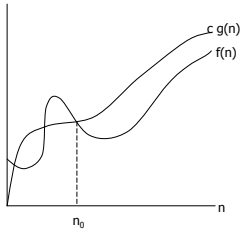
- Ziel:
  Konstante Summanden und Faktoren dürfen bei der Aufwandsbestimmung vernachlässigt werden.
- Gründe:
  - Man ist an asymptotischem Verhalten für große Eingaben interessiert
  - Genaue Analyse kann technisch oft sehr aufwendig oder unmöglich sein
  - Lineare Beschleunigungen sind ohnehin immer möglich (schnellere Hardware)
- Idee:
  - Komplexitätsmessungen mit Hilfe von Funktionenklassen. Etwa *O(f)* sind die Funktionen, die (höchstens) in der Größenordnung von *f* sind.
- Groß-O-Notation:
  Mit O-, Ω- und Θ-Notation sollen obere, untere bzw. genaue Schranken für das Wachstum von Funktionen beschrieben werden.

"Groß-O"

- Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Definition Groß-O: Die Ordnung von f (*the order of f*) ist die Menge
  $O(f(n)) = \{t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \exists c \in \mathbb{R}_{\geq 0}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c \cdot f(n)\}$
- Definition Groß-Omega: die Menge Ω ist wie folgt definiert:
  $\Omega(f(n)) = \{t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \exists c \in \mathbb{R}_{\geq 0}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : t(n) \geq c \cdot f(n)\}$
- Definition Groß-Theta: Die exakte Ordnung Θ von f(n) ist definiert als:
  $$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$$
- Terminologie: O, Ω, Θ, heißen manchmal auch Landau'sche Symbole

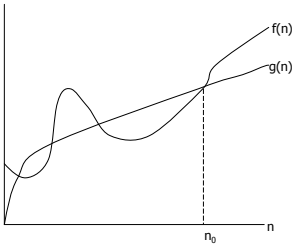
Veranschaulichung der O-Notation

- Die Funktion *f* gehört zur Menge *O*(*g*), wenn es positive Konstante *c*, n_0 gibt, so daß *f*(*n*) ab n_0 unterhalb *cg*(*n*) liegt



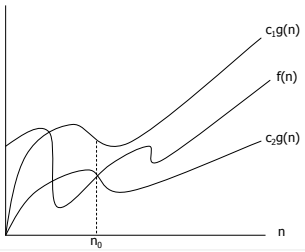
Veranschaulichung der Ω -Notation

- Die Funktion *f* gehört zur Menge *O*(*g*), wenn es positive Konstante *c*, n_0 gibt, so daß *f*(*n*) ab n_0 unterhalb *cg*(*n*) liegt



Veranschaulichung der Θ-Notation

- Die Funktion *f* gehört zur Menge *Θ*(*g*), wenn es positive Konstante c_1, c_2, und n_0 gibt, so daß *f*(*n*) ab n_0 zwischen $c_1 g(n)$ und $c_2 g(n)$ "eingepackt" werden kann



Bemerkungen zu den O-Notationen

- In manchen Quellen findet man leicht abweichende Definitionen, etwa
  $O(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ |$ es gibt positive Konstanten a und b mit $f(n) \leq ag(n) + b$ für alle n$\}$
- Für die relevantesten Funktionen f (etwa die monoton steigenden f nicht kongruent 0) sind diese Definitionen äquivalent.
- Schreibweise (leider) oft : $f = O(g)$ statt $f \in O(g)$
- Minimalität: Die angegebene Größenordnung muß nicht minimal gewählt sein
- Asymptotik: Wie groß n_0 ist bleibt unklar (kann sehr groß sein)
- „Verborgene Konstanten": Die Konstanten c und n_0 haben für kleine n großen Einfluß.

Beispiel Min-Search

- Behauptung: unser Minimum-Search-Algo besitzt Laufzeit Θ(n).
- Erinnerung:
  $T(n) \approx c_1 \cdot n + c_2$

```
def min(A):
  min = 1
  for j in range (2, len(A)):
    if A[j] < A[min]:
      min = j
```

- Zum Beweis ist zu zeigen:
  1. Es gibt ein c_2 und n_2, so daß die Laufzeit von Min–Search bei allen Eingaben der Größe $n \geq n_2$ immer höchstens $c_2 n$ ist. (Groß–O)
  2. Es gibt ein c_1 und n_1, so daß für alle $n \geq n_1$ eine Eingabe der Größe n existiert, bei der Min–Search mindestens Laufzeit $c_1 n$ besitzt. (Omega)

Beispiele zu Funktionsklassen

- Ist $n^2 \in O(n^3)$?
  - Gesucht: $c \in \mathbb{R}^+$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß Bed. erfüllt,
    also $\forall n > n_0 : n^2 \leq cn^3$
    $\Leftrightarrow 1 \leq c \cdot n \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{c}$
    Wähle $c = 1, n_0 = 1$
- Ist $n^3 \in O(n^2)$?
  - Gesucht: $c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N},$ so daß $\forall n > n_0 : n^3 \leq cn^2$
    $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : n \leq c$
    Widerspruch!
- $f(n) = n \log n \notin O(n)$