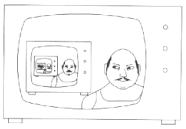
Informatik I
Rekursion

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

Motivation

- Neue Denkweise
- Leistungsfähiges Algorithmenschema
  - Divide-and-conquer
- Viele Berechnungen und Datenstrukturen sind von Haus aus selbst-bezüglich:
  - Ein Verzeichnis enthält Daten und andere Verzeichnisse
  - Euklid's ggT Algorithmus
  - Quicksort
  - Verkettete Datenstrukturen



Drawing Hands
M. C. Escher, 1948

Beispiel: Größter Gemeinsamer Teiler

- Finde größte ganze Zahl d, die p und q teilt

$$ggT(p,q) = \begin{cases} p & \text{falls } q = 0 \\ ggT(q, p\%q) & \text{sonst} \end{cases}$$

⬅ Basisfall (base case)

⬅ Reduktionsschritt (reduction step, converges to base case)

```
ggT(4032, 1272)= ggT(1272,216)
               = ggT(216, 192)
               = ggT(192, 24)
               = ggT(24, 0)
               = 24.
```

$4032 = 2^6 \times 3^2 \times 7^1$
$1272 = 2^3 \times 3^1 \times 53^1$

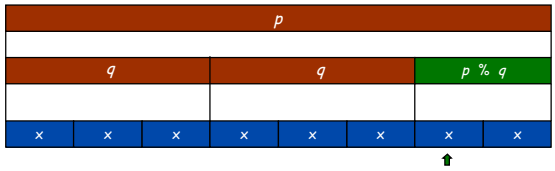
$ggT = 2^3 \times 3^1 = 24$

- Anwendungen.
  - RSA Verschlüsselung
  - Geschichte von Algorithmen

Euklid, 300 v.Chr.

- Beweis für Formel:

$$ggT(p,q) = \begin{cases} p & \text{falls } q = 0 \\ ggT(q, p\%q) & \text{sonst} \end{cases}$$



$p = kx$
$q = lx$
$p = nq + r$

$$p\%q = r = p - nq = kx - nlx = (k - nl)x$$

Python Implementierung

```
def gcd( p, q ):
    if q == 0:
        return p
    else:
        return gcd(q, p%q)
```

base case

reduction step

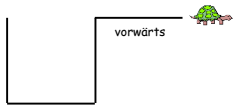
$$ggT(p,q) = \begin{cases} p & \text{falls } q = 0 \\ ggT(q, p\%q) & \text{sonst} \end{cases}$$

Basisfall (base case)

Reduktionsschritt (reduction step, converges to base case)

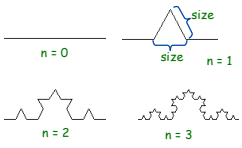
Exkurs: Turtle-Grafik

- Einfache Beschreibung von 2D-Grafiken
- Idee: Schildkröte auf Blatt Papier zieht Stift hinter sich her
- Schildkröte kann nur wenige Befehle ausführen:
  - Stift hoch / runter
  - Stiftfarbe wechseln
  - x mm nach vorne krabbeln (und Stift dabei hinter sich herziehen)
  - sich um n Grad nach links/rechts drehen
- Beispiel:
  - F: 1 cm vorwärts (Stift unten)
  - L: Linksdrehung um 90°
  - R: Rechtsdrehung um 90°
  - Zeichensequenz: F L F L F R F



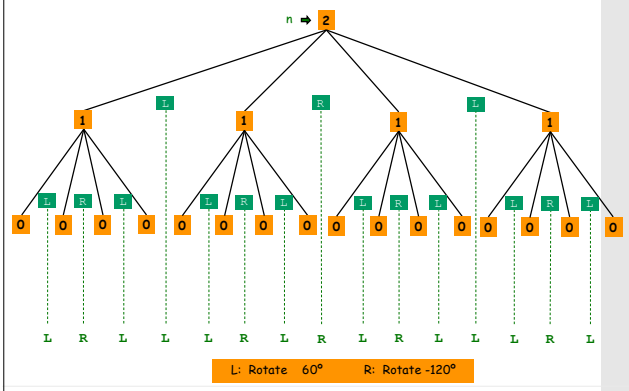
Koch-Schneeflocke

- Rekursiver Algo für Koch-Kurve der Ordnung n:
  1. Zeichne die Kurve der Ordnung n-1
  2. Drehe das Blatt um 60°
  3. Zeichne die Kurve der Ordnung n-1
  4. Drehe um -120°
  5. Zeichne die Kurve der Ordnung n-1
  6. Drehe um 60°
  7. Zeichne die Kurve der Ordnung n-1



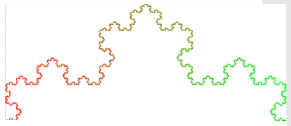

```
def koch( n, size):
    if n == 0:
        Turtle.move(size)
    else:
        koch(n-1, size)
        Turtle.rotate(60)
        koch(n-1, size)
        Turtle.rotate(-120)
        koch(n-1, size)
        Turtle.rotate(60)
        koch(n-1, size)
```


Rekursions-Baum



Koch-Schneeflocke

- Rekursiver Algo für "Koch-Schneeflocke der Ordnung n":
  1. Zeichne Koch-Kurve der Ordnung n
  2. Drehe um -120º
  3. Zeichne Koch-Kurve der Ordnung n
  4. Drehe um -120º
  5. Zeichne Koch-Kurve der Ordnung n

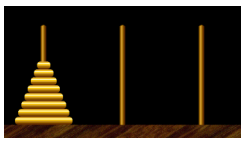


- Koch-Schneeflocke in Python

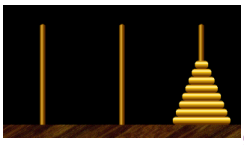
```
def snowflake( N, width ):
    height = int( width * 2.0 / math.sqrt(3.0) )
    size = width / math.pow(3.0, N)

    // create and init turtle
    . . .

    // draw snowflake
    x0, y0 = 0, width * math.sqrt(3.0) / 2
    turtle.fly( x0, y0 )
    koch(N, size)
    turtle.rotate(-120)
    koch(N, size)
    turtle.rotate(-120)
    koch(N, size)
```


Türme von Hanoi

- Verschiebe alle Scheiben von linkem Stab zu rechtem Stab
  - Jeweils darf nur eine Schreibe verschoben werden
  - Eine Scheibe darf entweder auf leeren Stab oder auf eine größere Scheibe gesetzt werden, nicht auf kleinere Scheibe



Start

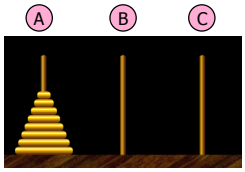


Ende

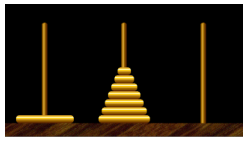
Edouard Lucas (1883)

Towers of Hanoi demo
(http://www.mazeworks.com/download/index.htm)

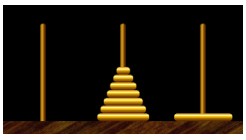
Rekursive Lösung



Verschieben n-1 kleinste Scheiben auf Stab B

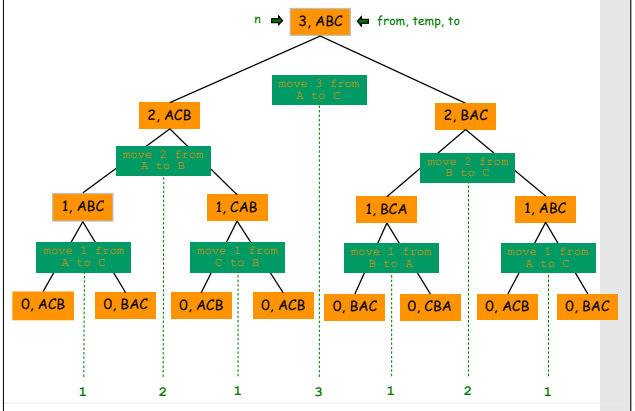


Verschiebe größte Scheibe auf Stab C



Verschieben n-1 kleinste Scheiben auf Stab C

Rekursionsbaum



Eigenschaften der Lösung der Türme von Hanoi

- 2^N - 1 Scheibenbewegungen, um N Scheiben-Problem zu lösen
- Kleinste Scheibe bewegt sich immer in die gleiche Richtung (bei "kreisförmiger" Anordnung der Stäbe)
- Es gibt auch nicht-rekursive (iterative) Lösungen

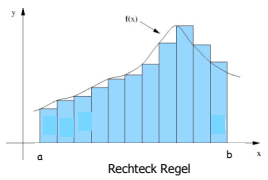
Divide-and-Conquer

- Eine Algorithmentechnik (Algorithmenparadigma)
  - Annahme: wir hätten schon eine Lösung für Probleme der Größe N-1
  1. Teile Problem der Größe N auf in zwei oder mehr kleinere Probleme mit ähnlicher Struktur
  2. Löse die kleineren Probleme (rekursiv mit der gleichen Methode)
  3. Kombiniere die Lösungen zur Lösung des originalen Problems
- Historischer Ursprung
  - Julius Caesar (100 v.Chr. - 44 v.Chr.)
  - "*Divide et impera*."

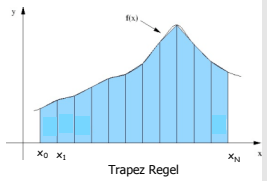
- Für viele Probleme gibt es elegante *divide-and-conquer* Lösung

Beispiel: Numerische Integration

- Aufgabe: Integriere eine glatte Funktion f(x) für x in [a,b]
  - Quadratur: unterteile den Abstand von a bis b in kleine Stücke, approximiere die Fläche jeden Stücks unter der Kurve, und berechne die Summe
  - Rechteck-Regel: approximiere durch konstante Funktionen
  - Trapez-Regel: approximiere durch lineare Funktionen



Rechteck Regel



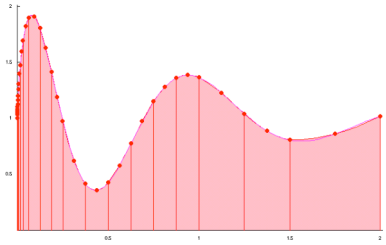
Trapez Regel

Python-Code für Trapez-Regel

```
def f(x):                                   # zu integrierende Funktion
    return math.exp(-x*x/3) / math.sqrt(2*math.pi)

def trapezoid(a, b, N):                     # N = Anzahl der
    h = (b - a) / N                         # Unterteilungen des Intervals
    sum = 0.5 * h * (f(a) + f(b))
    for k in range(1, N):
        sum += h * f(a + h*k)
    return sum

print trapezoid(-3.0, 3.0, 1000)
```


Verbesserung: Adaptive Quadratur

- Problem der Trapez-Regel: festgelegte Anzahl äquidistanter Teilintervalle
- Adaptive Quadratur: veränderliche Anzahl Teilintervalle, die die Form der Kurve anpassen



Rekursive Lösung

- Rekursion:
  - Unterteile das Intervall in zwei gleiche Stücke
  - Berechne die Fläche jedes Stückes rekursiv
  - Liefere die Summe zurück
- Abbruchkriterium (Basisfall):
  - Durch zwei versch. Quadraturverfahren die geg. Fläche approximieren
  - Wenn fast gleich, diese Fläche liefern; sonst: Rekursion weitermachen

```
def adaptive(a, b, eps) :
    area  = trapezoid(a, b, 10)
    check = trapezoid(a, b,  5)
    if math.abs(area - check) > eps:
        m = (a + b) / 2
        area = adaptive(a, m) + adaptive(m, b)
    return area
```


Eine schlechte rekursive Funktion

- Hier: kein Basis-Fall!
- Analog zu unendlichen Schleifen mit for- and while- Schleifen.

```
def ulam(x):
    print x
    if x % 2 == 0:
        return ulam(x / 2)
    else:
        return ulam(3 * x + 1)
```

```
% ./ulam.py
5
16
8
4
2
1
4
2
1
...
```

- Nicht bekannt , ob für belibige Startwerte terminiert

Eine zweifelhafte rekursive Funktion

- Hier: es gibt einen "Anti-Reduktions-Schritt"
  - konvergiert die Folge der Parameter immer zum Basis-Fall??

```
def ulam(x):
    if x <= 1:
        return
    else if x % 2 == 0:
        return ulam(x / 2)
    else:
        return ulam(3 * x + 1)
```

Anti-Reduktions-Schritt

- Später: in der Berechenbarkeitstheorie wird genauer untersucht, ob wir immer feststellen können, ob eine Funktion terminiert
  - Halte-Problem