Darstellung von Text

- 7 Bit pro Zeichen genügen ($2^7 = 128$)
  - 26 Kleinbuchstaben
  - 26 Großbuchstaben
  - 10 Ziffern

  } alphanumerische Zeichen
  - Sonderzeichen wie '&', '!', '"'
  - nicht druckbare Steuerzeichen, z.B.
    - CR (carriage return = Wagenrücklauf)
    - TAB (Tabulator)
    - BEL (bell = Klingelzeichen)

ASCII-Code

- Wie ordnet man den Zeichen je eine Zahl (Code) zu?
- Tabelle mit 128 Zeichen
- Einträge werden durchnummeriert
- jedes Zeichen erhält als Code seine Position in der Tabelle als 7 stellige Binärzahl

  $b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$
- das achte Bit eines Bytes wurde ursprünglich als Paritäts-Bit (parity bit) genutzt (s.u.)

- Tabelle kann im Prinzip beliebig gewählt werden
  - Sender und Empfänger von Informationen müssen aber dieselbe Tabelle verwenden

  American **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange
- seit 1968 festgelegt
  - 8-Bit-Code, höchstwertiges Bit ist Parity-Bit
- Systematik
  - die 10 Ziffern folgen aufeinander
    - Bits b3b2b1b0 sind Binärdarstellung des Zahlenwertes
  - Klein- und Großbuchstaben sind jeweils alphabetisch sortiert
- Gibt noch viele andere Tabellen!

Parity-Bit

- Parity-Bit $b_7 = \sum_{i=0}^{6} b_i$
  - ungerade Parität (*odd parity*) bedeutet:
    $b_7 = 1 \Leftrightarrow$ Anzahl 1-Bits in $b_0 \ldots b_6$ ist ungerade
  - gerade Parität (*even parity*) bedeutet:
    $b_7 = 1 \Leftrightarrow$ Anzahl 1-Bits gerade
- 1-Bit-Fehler bei der Datenübertragung können so erkannt werden

ASCII-Tabelle

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	NUL					ACK	BEL	BS	HT	LF	VT	FF	CR			
1	DLE							CAN			ESC					
2		!	"	#	$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
4	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
6	‘	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
7	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{	—	}	~	

- 00 - 1F = Steuerzeichen (*control characters*, *non-printable characters*)
  - BS = backspace, LF = linefeed, CR = carriage-return, …

Länderspezifische Zeichen

- länderspezifische Zeichen fehlen, z.B.
  - Ä, Ö, Ü, ä, ö, ü, ß, §, Å, æ, ¥
- Lösungsansatz (1986)
  - verzichten auf das Parity-Bit
  - 8. Bit für Verdopplung der Code-Tabelle nutzen
- Vorteil
  - in den meisten europäischen Regionen können alle sprach-spezifischen Zeichen dargestellt werden
- Nachteil
  - verschiedene Regionen interpretieren dieselben Codes unterschiedlich
  - Benutzung verschiedener Code-Tabellen in verschiedenen Regionen
  - Datenaustausch schwierig

Unicode

- Standard seit 1993
- 16-Bit Code (65536 Zeichen)
- Unicode definiert eine Code-Tabelle für einen universellen Zeichensatz, der alle Schriften der Welt umfassen soll; Unicode deckt bereits die standardisierten Zeichensätze ab
- Unicode 3.0 (seit 2000)
  - 57709 Codes festgelegt (nur noch 7827 frei)
- weitere Informationen, siehe
  - http://www.unicode.org

Grundbegriffe

- Zeichen (*character*) ist elementare Texteinheit
  - abhängig von der Sprache
  - abhängig von der Verarbeitungsfunktion:
    spanisches „ll“ wird für das Sortieren als ein Zeichen betrachtet, aber für Eingabe und Anzeige als zwei Zeichen
  - Abstraktion von graphischen Ausprägungen (Glyphen, *glyphs*);
    das mit dem ISO-Namen „Latin Capital Letter A“ benannte Zeichen als Abstraktion für die Glyphen

A 𝐀 A 𝘈 𝘼

- Zeichensatz (*character repertoire*) = Menge, Vorrat von Zeichen; wird normalerweise definiert über die Angabe von Namen für die Zeichen und eine Reihe von typischen Glyphen für die Zeichen
- Schrift, auch Alphabet (*script* oder *alphabet*) als ein Zeichensatz für eine bestimmte Sprache oder Familie von Sprachen: lateinische Schrift, griechische Schrift, hebräische Schrift, chinesische Schrift

- Code-Tabelle für einen Zeichensatz (*code table* oder (*coded*) *character set*) = Tabelle, in der jedes Zeichen eines Zeichensatzes eine Nummer erhält; die Nummern werden in aufsteigender Reihenfolge von 0 an vergeben und können Lücken enthalten; Größe der Code-Tabelle bestimmt die Zahl der Bits, die zur Darstellung der Zeichen-Codes notwendig ist (8 Bit = 256 Werte, 16 Bit = 63.536 Werte)
- Code oder Code-Position eines Zeichens in Bezug auf eine Code-Tabelle (*code set position*, *code point*, *character number*) als die dem Zeichen in der Code-Tabelle zugeordnete Nummer

- Kodierung oder Kodierungsschema (*encoding scheme*, *character encoding*) als eine Abbildung, die eine Folge von Zeichen in eine Folge von Bytes übersetzt
  - modal vs. nicht-modal (Zeichen-Morphismus)
  - feste vs. variable Code-Länge
- Achtung: Unicode definiert nur die Code-Tabelle! Unicode selbst definiert noch nicht, wie eine Zeichenkette in eine Byte-Folge abgebildet wird! Das ist Sache des Kodierungsschemas!
  - 16-Bit Code-Tabelle = 65.536 Positionen (mögl. Zeichen)
  - Es gibt Kodierungen UTF-8, UTF-16, UCS2, etc.

Standardisierte Code-Tabellen

Sprache	Code-Tabelle	Umfang
Englisch	US-ASCII (ISO 646 IRV:1991)	94
Franz.	ISO 8859-1:1987	191
Chinesisch	GB 2312-80	7.445
Chinesisch	Big 5	13.523
Japanisch	JIS X 0208-1990	6.897
Koreanisch	KS C 5601-1992	8.224
alle	ISO/IEC 10646-1:1993 (Unicode 2.0)	38.885

Kodierungen

Kodierung	Code-Tabelle	Länge
Shift-JIS	JIS X 0208-1990	2
EUC-JP	JIS X 0208-1990 and JIS X 0212-1990	2
Big 5	Big 5	2
EUC-KR	KS C 5601-1992	2
UTF-8	Unicode 2.0	≤ 3

Kodierungsschemata von Unicode

- UCS2:
  - kodiert eine 16-Bit-Binärzahl als zwei Bytes
- UTF-8:
  - kodiert 16-Bit-Binärzahl mit ein bis drei Bytes
    kodiert 31-Bit-Binärzahl mit ein bis sechs Bytes
  - transparent für ASCII-Zeichen von 0 bis 127: kodiert in einem Byte mit höchstwertigem Bit 0
  - übrige Binärzahlen kodiert durch Folgen von n Bytes, von denen jedes das höchstwertige Bit auf 1 gesetzt hat;
    das erste Byte hat n Bits auf 1 und das n+1-te auf 0 gesetzt, die folgenden Bytes beginnen mit 10;
    die übrigen Positionen dienen der Kodierung der Binärzahl

32-Bit-Binärzahl	Byte-Sequenz UTF-8	Bits
00000000-0000007F	0xxxxxxx	7
00000080-000007FF	110xxxxx 10xxxxxx	11
00000800-0000FFFF	1110xxxx 10xxxxxx 10xxxxxx	16
00080000-001FFFFF	11110xxx 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx	21
00200000-03FFFFFF	111110xx 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx	26
04000000-7FFFFFFF	1111110x 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx	31

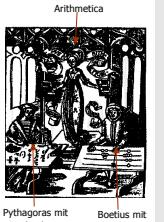
- Jeder Zeichen-Code muß in dem kürzest-möglichen Block kodiert werden
- beim Dekodieren muß darauf geachtet werden, daß nur gültige Byte-Sequenzen dekodiert werden
  beispielsweise ist `11000000 10000001` ungültig, da die 32-Bit-Binärzahl 00000001 durch die kürzere Byte-Sequenz `00000001` darstellbar ist

Darstellung von ganzen Zahlen

- Ein Zahlsystem (*number system*) besteht aus
  - endlich vielen Ziffern (*digits*) und
  - einer Vorschrift,
    - wie Zeichenreihen, die aus diesen Ziffern gebildet wurden, als Zahl-Werte zu interpretieren sind
- Arabische Zahlsysteme zur Basis β
  - Natürliche Zahl z = $z_n \ldots z_0$ hat den Wert

$$z = \sum_{i=0}^{n} z_i \beta^i$$

mit $0 \leq z_i < \beta$



- Basis β der Darstellung wird Radix genannt
  - Namen einiger wichtiger Zahlsysteme
    - Radix 10: Dezimaldarstellung
    - Radix 2: Binärdarstellung
    - Radix 8: Oktaldarstellung
    - Radix 16: Hexadezimaldarstellung
- Zur Kennzeichnung der Basis wird diese oftmals als Subscript angegeben
  - $7_{10}=7_8=111_2$
  - $9_{10}=11_8=1001_2$
  - $15_{10}=17_8=1111_2$

ASCII-Zahlen

- Zahlen inmitten von anderem Text werden als ASCII-Codes dargestellt, z.B.

$$(42)_{10}: (00110100\ 00110010)_{ASCII}$$

  - verschwendet Speicherplatz
    - N Bits für N/8 Ziffern, d.h. $10^{N/8} = 2^{0.42*N}$ Zahlen
    - N Bits können aber 2^N verschiedene Zahlen kodieren
  - einfache (ziffernweise) Umwandlung von ASCII-Zahlen in Dezimalzahlen und umgekehrt
  - arithmetische Operationen sind aufwendig

BCD-Zahlen

- BCD-Zahlen (*Binary Coded Decimals*)
  - binär kodierte Dezimalzahlen
  - für eine Ziffer genügen 4 Bit
  - Beispiel

$$(42)_{10} = (0100\ 0010)_{BCD}$$

  - immer noch verschwenderisch, da mit N Bits nur $2^{0,83N}$ Zahlen dargestellt werden können
  - einfache (ziffernweise) Umwandlung von Dezimalzahlen in BCD-Zahlen und umgekehrt
  - arithmetische Operationen immer noch aufwendig

Binärdarstellungen

- Idee
  - Zahlen mit Stellenwertkodierung darstellen
    - Vorzeichen (falls nicht nur positive Zahlen dargestellt werden sollen)
    - Ziffern
    - Wert der Stelle, an der die Ziffer steht
  - Beispiel Dezimalsystem

    $(4711)_{10} = 4 \bullet 10^3 + 7 \bullet 10^2 + 1 \bullet 10^1 + 1 \bullet 10^0$
  - Analog Binärsystem

    $(11010)_2 = 1 \bullet 2^4 + 1 \bullet 2^3 + 0 \bullet 2^2 + 1 \bullet 2^1 + 0 \bullet 2^0 = (26)_{10}$

Vorzeichenlose (positive) Zahlen

$$w : \{0,1\}^n \mapsto \mathbb{N}_0$$

natürliche Zahlen mit 0

$$b_{n-1} \ldots b_1 b_0 \mapsto w(b_{n-1} \ldots b_1 b_0) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

- 2^n Zahlen mit n Bits darstellbar: 0, ..., 2^n-1
- jede Zahl hat eine eindeutige Kodierung in n Bits

Umwandlung ins Binärsystem

- Umwandlung binär → dezimal
  - trivial
  - Addition der Zweierpotenzen
- Umwandlung: dezimal → binär
  - Zusammensetzen aus Zweierpotenzen
  - Umwandlung von "links nach rechts" durch Bestimmung der größten Zweierpotenz, die kleiner oder gleich der umzuwandelnden Zahl ist
    - suche aus Tabelle die größte Zweierpotenz, die kleiner oder gleich der Zahl ist
    - subtrahiere sie von der Zahl
    - verfahre genauso mit der Differenz, bis sie 0 ist

Divisionsmethode

- Besser:
  - Umwandlung von "rechts nach links" mit ganzzahliger Division durch 2 mit Rest

$$w = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i = \sum_{i=1}^{n-1} b_i 2^i + b_0 = 2(\sum_{i=0}^{n-2} b_{i+1} 2^i) + b_0$$

  - b0 ist der ganzzahlige Rest bei der Division durch 2
  - Verfahre ebenso mit dem Ergebnis der Division

- exakte ganzzahlige Division
  - bei der Division einer ganzen Zahl z durch einen ganzzahligen Divisor d entsteht ein ganzzahliger Quotient q und ein ganzzahliger Rest r mit

$$z = q \cdot d + r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r < d$$

  - Operationen, die den Quotienten und den Rest bestimmen

$$q = z \ \text{div}\ d$$
$$r = z \ \text{mod}\ d$$

Beispiel für Divisionsmethode

z	z div 2	z mod 2
42	21	0
21	10	1
10	5	0
5	2	1
2	1	0
1	0	1
0	0	0
0	0	0

- Resultat: $(42)_{10} = (101010)_2$

Oktalsystem, Hexadezimalsystem

- Oktalsystem
  - Darstellung der Zahlen zur Basis 8
  - Ziffern 0, ..., 7

$$(d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_0)_8 = d_{n-1}8^{n-1} + d_{n-2}8^{n-2} + \ldots + d_0 8^0$$

- Hexadezimalsystem
  - Darstellung der Zahlen zur Basis 16
  - Hexziffern: 0, ..., 9, A, ..., F

$$(d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_0)_{16} = d_{n-1}16^{n-1} + d_{n-2}16^{n-2} + \ldots + d_0 16^0$$

- Vorteil der Basen 8 und 16
  - triviale Umrechnungen in und aus dem Binärsystem durch Zusammenfassen der entsprechenden Bits

Umrechnung: binär ↔ oktal

o.B.d.A. sei n ein Vielfaches von 3

$$z = (b_{n-1}\ldots b_1 b_0) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$
$$= \underbrace{\underbrace{(b_{n-1}2^2 + \ldots)}_{o_{n/3}} \cdot 8^{n/3-1}}_{} + \ldots + \underbrace{(b_5 2^2 + b_4 2^1 + b_3 2^0) \cdot 8^1}_{o_1} + \underbrace{(b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0) \cdot 8^0}_{o_0}$$
$$= \sum_{i=0}^{n/3-1} o_i 8^i$$
$$= (o_{n/3-1}\ldots o_1 o_0)_8$$

binär
011 001 101 100 010
3 1 5 4 2
oktal

Addition von Binärzahlen

- Zahlen können in jedem Zahlensystem wie gewohnt addiert werden

	Dezimal	Binär	Oktal	Hexadezimal
	2752	010010	2752	27CA
+	4261	100111	4261	AF93
=	7013	111001	7233	D75D

- der Computer verwendet meist feste Wortbreiten
  - ein Übertrag (*carry*) über die höchstwertige Stelle hinaus (*overflow*) wird häufig ignoriert
  - "die Rechnung stimmt nur modulo 2^n "

Vorzeichenbehaftete ganze Zahlen

- höchstwertiges Bit kodiert Vorzeichen

$$w : \{0,1\}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ganze Zahlen

$$(b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0) \mapsto w(b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0) = (b_{n-1}, \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i)$$

Vorzeichenbit

gesonderte Behandlung des Vorzeichens

Darstellung als Betrag und Vorzeichen

- Zahlenwert ergibt sich aus

$$w(b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0) = \begin{cases} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i & , \text{ falls } b_{n-1} = 0 \\ - \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i & , \text{ falls } b_{n-1} = 1 \end{cases}$$

- Beispiele für n=6
  - $w(011010) = +(1 \bullet 2^4 + 1 \bullet 2^3 + 0 \bullet 2^2 + 1 \bullet 2^1 + 0 \bullet 2^0) = (+26)_{10}$
  - $w(111010) = -(1 \bullet 2^4 + 1 \bullet 2^3 + 0 \bullet 2^2 + 1 \bullet 2^1 + 0 \bullet 2^0) = (-26)_{10}$

- Zahlenbereich ist symmetrisch
  - Wertebereich: $-(2^{n-1}-1), \dots, +2^{n-1}-1$
  - insgesamt 2^n-1 Zahlen
- Darstellung der 0 ist redundant
  - $w(0000\dots0) = w(1000\dots0) = (0)_{10}$

"+0" "-0"

  - Vergleichsoperationen schwer zu implementieren

Addition bei Betrag und Vorzeichen

- Addition negativer Zahlen
  - komplizierter als normale binäre Addition

$$\begin{array}{rcl} (0011)_2 & & (3)_{10} \\ +\,(1001)_2 & & +\,(-1)_{10} \\ (1100)_2 & \neq & (2)_{10} \end{array}$$

  - technisch zwar realisierbar
  - die folgende Zweierkomplementdarstellung vermeidet aber alle genannten Nachteile

Zweierkomplementdarstellung

- Nutze aus, daß

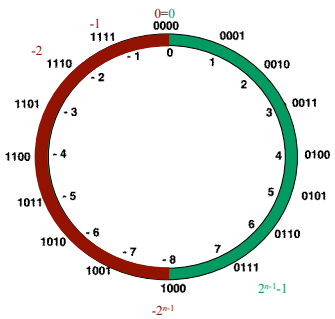
$$-z \equiv 2^n - z \mod 2^n$$

- Wert in Zweierkomplementdarstellung

$$w(b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_0) = -b_{n-1}2^{n-1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i}_{0,\ldots,2^{n-1}-1}$$

  - für bn-1=0 erhält man die positiven Zahlen wie gehabt
  - für bn-1=1 wird 2n-1 vom Wert subtrahiert
  - Zahlenbereich: -2n-1, ..., 2n-1-1
  - Zahlenbereich nicht symmetrisch!
  - Darstellung der 0 nicht redundant
  - bevorzugte Methode zur Darstellung ganzer Zahlen in heutigen Computern

Zweierkomplement im Zahlenkreis



Zweierkomplement, negative Werte

- Alternative Bestimmung des Wertes einer negativen Zahl
  1. Invertiere alle Bits
  2. Bestimme den Wert der nun positiven Zahl
  3. Addiere eine 1
  4. Das Ergebnis ist der Betrag der ursprünglichen negativen Zahl
- Beispiel
  - $(1011001)_2$
  1. Invertieren: $(0100110)_2$
  2. = 32+4+2 = 38
  3. = 38+1 = 39
  4. Ergebnis: -39
- Laut Formel
  - $(1011001)_2$
  1. = -64+16+8+1
  2. = -64+25
  3. = -39

- Bitweises vertauschen allein definiert das *Einerkomplement*

Beweis für alternative Berechnung

Invertierung aller Bits entspricht Subtraktion vorzeichenloser Zahlen von $(111111\ldots1)_2$, denn z.B.

$(011001\ldots1)_2 + (100110\ldots0)_2 = (111111\ldots1)_2$

Also gilt für $b_{n-1} = 1$

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i' 2^i + 1 = (2^n - 1) - \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i + 1$$

$$= 2^n - b_{n-1}2^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i = 2^{n-1}(2-1) - \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i$$

$$= -(-2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i)$$

Alternativer Bew.: $x - y \equiv x + (2^n - y) \equiv x + \bar{y} \mod 2^n$

Addition in Zweierkomplementdarstellung

- Addition funktioniert wie normale Binäraddition vorzeichenloser Zahlen
  - Übertrag aus der höchstwertigen Stelle ignorieren
  - Beispiele

$(0011)_2$	$(3)_{10}$
$+(1001)_2$	$+(-7)_{10}$
$(1100)_2$	$(-4)_{10}$

$(1100)_2$	$(-4)_{10}$
$+(1101)_2$	$+(-3)_{10}$
$1(1001)_2$	$(-7)_{10}$

- Beweis: selbst durch Fallunterscheidung

Einbettung in längere Zahldarstellungen

- Zahlen müssen sich an die Wortlängen des verwendeten Computers orientieren
- Problem: Einbettung einer Zahl in eine Darstellung mit größerer Wortlänge

$$w(b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_0)$$

$$= \begin{cases} w(b_{n-1}0\ldots0b_{n-2}\ldots b_0) & \text{Betrag + Vorzeichen} \\ w(b_{n-1}\ldots b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_0) & \text{1er- oder 2er-Kompl.} \end{cases}$$

Beweis zur Einbettung

- nur für Zweierkomplement
- zu zeigen:
  - 1. Fall: $b_{n-1} = 0 \quad w(b_{n-1}b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_0) = w(b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_0)$
    - positive Zahl, trivial
  - 2. Fall: $b_{n-1} = 1$

$$w(11b_{n-2}\ldots b_0)$$

$$= -1\cdot 2^n + 1\cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i = 2^{n-1}(-2+1) + \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i$$

$$= -1\cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i 2^i$$

$$= w(1b_{n-2}\ldots b_0)$$