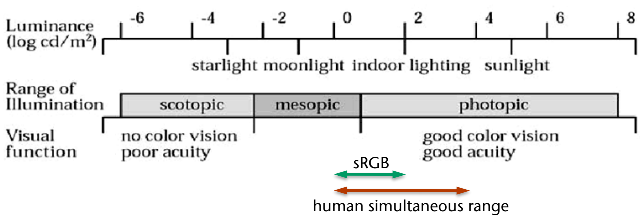
Computer-Graphik II
Tone Mapping / Tone Reproduction

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
cg.in.tu-clausthal.de

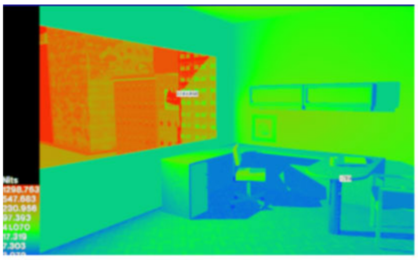
Motivation

- Definition:
  - Der Dynamikbereich (*dynamic range*) eines Bildes ist das Kontrastverhältnis zwischen dem hellsten und dunkelsten Teil
  - Der Dynamikbereich eines Displays bzw. optischen Sensors ist das Verhältnis der hellsten darstellbaren bzw. wahrnehmbaren Leuchtdichte zur dunkelsten
- Der Dynamikbereich des menschlichen Sehsystems (Human Visual System, HVS):



Quellen von High Dynamic Range Images (HDRI)

- Ray-Tracing: physikalisch korrekte synthetische Bilder
- Photographie:
  - mehrere Aufnahmen mit verschiedenen Belichtungszeiten
  - Ineinander "blenden" (benötigt kalibrierte Antwort-kurve der Kamera)

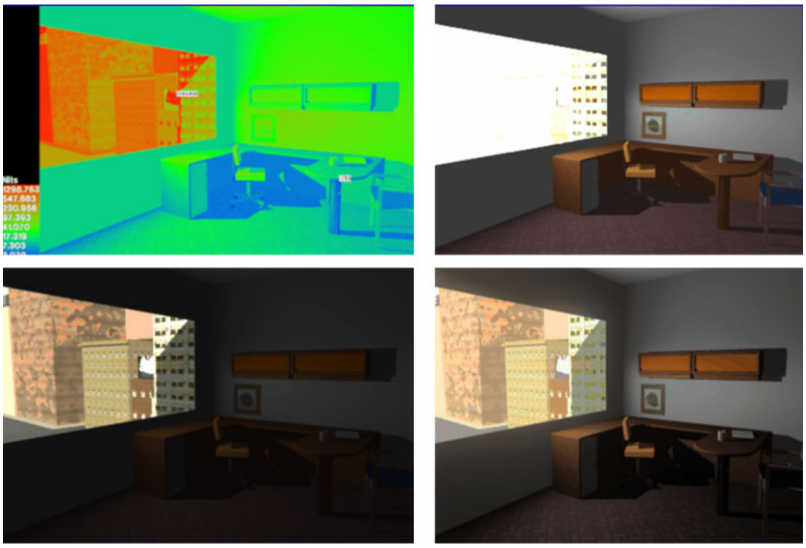


Darstellung von HDR-Bildern

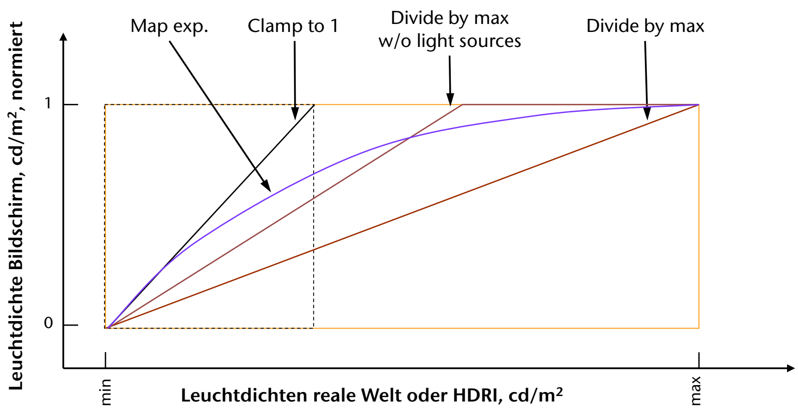
- Verwende entweder HDR-Displays ...
- ... oder LDR-Displays; dann benötigt man:

- Tone mapping/ tone reproduction = Abbildung des potentiellen "high dynamic range" (HDR) von realen Leuchtdichten auf eine "low dynamic range" (LDR) eines Displays mit begrenzter Leuchtdichtenbandbreite.

Informelle Darstellung des Problems



Naives Tone-Mapping



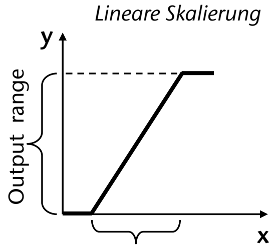
Resultat des naiven Mappings

Divide by Max *Clamp to 1* *Exp. mapping*

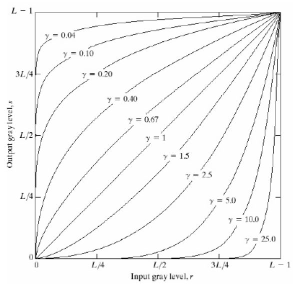
Wichtige Klasse von TMs: Punktoperationen

- Betrachte zunächst reine "Punktoperationen":
  - Bestimme eine Transferfunktion $y = T(x)$ (heißt auch Tone-Mapping-Operator)
  - T hängt nur vom Bild und von x ab; ist völlig unabhängig von der Nachbarschaft um x
- Beispiele:

Lineare Skalierung

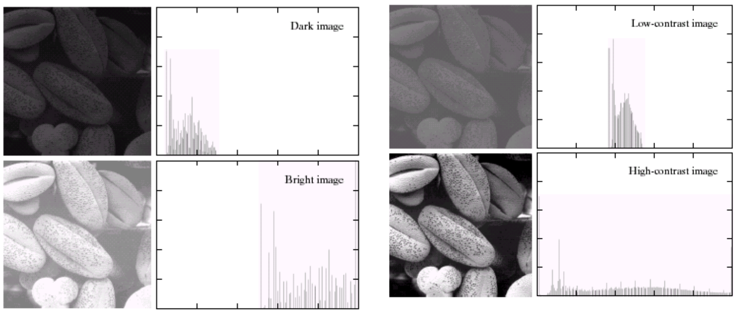


Gammakorrektur



Das Luminanz-Histogramm

- Unbalanciertes Histogramm nutzt nicht den vollen dynamischen Wertebereich aus
- Balanciertes Histogramm ergibt ein angenehmeres Bild und gibt den Inhalt wesentlich besser wider



- Das Histogramm eines Bildes enthält wertvolle Informationen über die Graustufen
- Es enthält keine räumlichen Informationen
- Alle folgenden Bilder haben exakt das gleiche Histogramm!

Historische Randnotiz: Histogramme zur Entschlüsselung

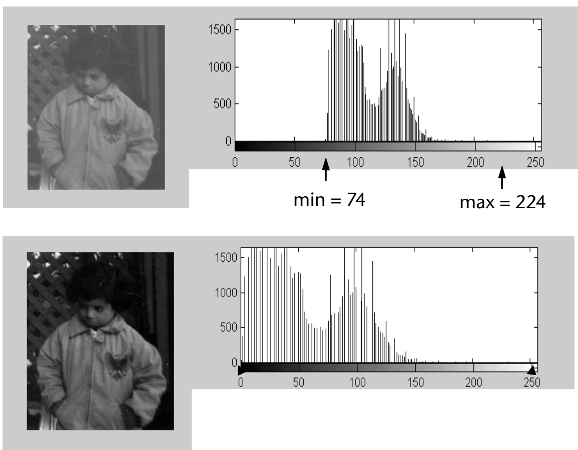
- Erstmals vorgestellt durch Abu Yusuf Ya'qub ibn Ishaq al-Sabbah Al-Kindi als Hilfsmittel zur Dechiffrierung des Ersetzungs-Codes
  - Heißt heute Frequenzanalysemethode
  - Durchbruch zu dieser Zeit, 850 n. Chr. [Simon Singh: The Code Book, 1999]

Histogram stretching

- Lineare Skalierung = "*histogram stretching*": $J = \frac{I - I_{min}}{I_{max} - I_{min}} \cdot J_{max}$

I

J



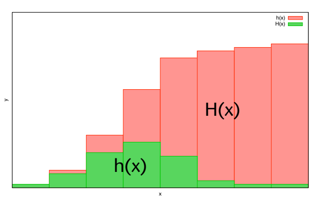
Interpretation des Histogramms

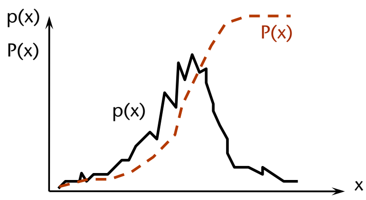
- Behandle Pixel als unabhängige, gleichverteilte Zufallsvariablen (*i.i.d. random variables = independent, identically distributed RVs*)
- Histogramm = diskrete Approximation der Wahrscheinlichkeits-dichtefunktion (*probability density function, PDF*)

Diskrete (Histogramm) vs. kontinuierliche Formulierung (PDF/CDF)

$L =$ Anzahl Levels

$x \in 0, \ldots, L-1$	$x \in [0,1]$
Histogramm:	PDF:
$h(x) =$ Anz. Pixel mit Level x	$p(x) =$ "Dichte" am Level x
Kumulatives Histogramm:	Cumul. distrib. function (CDF):
$H(x) = \sum_{u=0}^{x} h(u)$	$P(x) = \int_0^x p(u)du$





- Klar ist:

$$H(L-1) = \sum_{u=0}^{L-1} h(u) = \text{Anzahl Pixel } N$$

  - Deswegen wird oft $h(x)$ bzw. $H(x)$ mit $\frac{1}{N}$ normiert
- Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis "X ≤ x" eintritt, ist

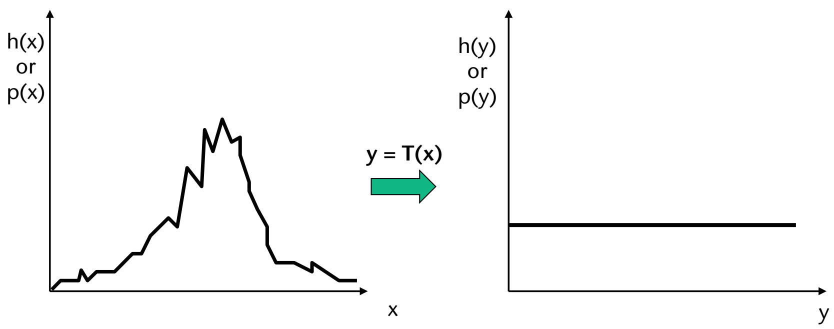
$$P[X \leq x] = P(x) = \int_0^x p(u)du$$

bzw.

$$P[X \leq x] = P(x) = \frac{1}{N} \sum_0^x h(u)$$

Histogram Equalization

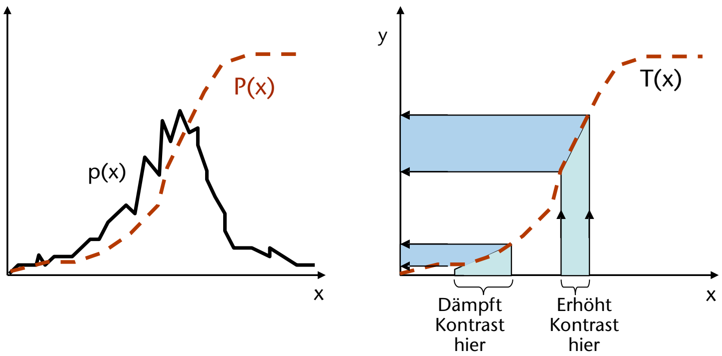
- Gegeben: eine Zufallsvariable X mit bestimmter PDF p_X
- Gesucht: Funktion T, so daß die Zufallsvariable $Y = T(X)$ eine gleichverteilte PDF $p_Y \equiv \text{const}$ hat
- Diese Transformation heißt Histogram Equalization



- Behauptung: die Transferfunktion

$$y = P(x) = \int_0^x p(u)du$$

leistet genau diese Histogram-Equalization



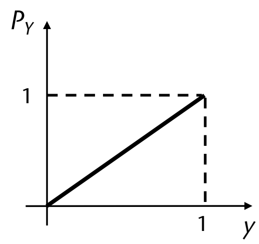
1. Beweisvariante

- Zu zeigen: die CDF

$$P_Y(y) = y$$

- Beweis durch Einsetzen:

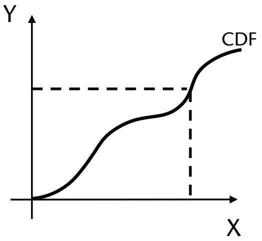
$$\begin{aligned} P_Y(y) &= P[Y \leq y] \\ &= P[T(X) \leq y] \\ &= P[P_X(x) \leq y] \\ &= P[x \leq P_X^{-1}(y)] \\ &= P_X(P_X^{-1}(y)) \\ &= y \end{aligned}$$

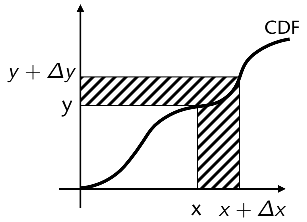


2. Beweisvariante

- Sei X eine stetige Zufallsvariable
- Sei $Y = T(X)$ (Y ist also auch stetige ZV)
- Sei T diff'bar und monoton wachsend
- Damit existiert T' und T^{-1}
- Da T alle $x \leq s \leq x + \Delta x$ auf $y \leq t \leq y + \Delta y$ abbildet, gilt

$$\int_x^{x+\Delta x} p_X(s)ds = \int_y^{y+\Delta y} p_Y(t)dt$$





- Für kleine Δx gilt also

$$p_Y(y)\Delta y \approx p_X(x)\Delta x \qquad p_Y(y) \approx p_X(x)\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

- Wenn $\Delta x \to 0$, dann wird die Gleichung exakt:

$$p_Y(y) = \lim_{\Delta x \to 0} p_X(x)\frac{\Delta x}{\Delta y} = p_X(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x} = T'(x)$$

- Zusammen:

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{T'(x)}$$

- Jetzt noch $x = T^{-1}(y)$ einsetzen ergibt

$$p_Y(y) = \frac{p_X(T^{-1}(y))}{T'(T^{-1}(y))}$$

- Nebenresultat: wir wissen jetzt, wie man Verteilungsfunktionen umrechnen muß, wenn eine Zufallsvariable eine Funktion einer anderen Zufallsvariable ist.

- Weiter mit der Histogramm-Equalization ...

- Gesucht ist T, so daß (oBdA)

$$p_Y(y) \equiv 1$$

- Einsetzen liefert

$$\frac{p_X(T^{-1}(y))}{T'(T^{-1}(y))} = 1$$

$$T'(T^{-1}(y)) = p_X(T^{-1}(y))$$

- Einsetzen von $x = T^{-1}(y)$ liefert $T'(x) = p_X(x)$

- Gesucht war T, also noch integrieren :

$$T(x) = \int_0^x T'(u)du = P_X(x)$$

Beispiele

Orig. Bild | Histogramm | Resultat