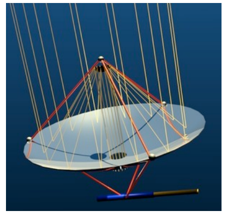
Computer-Graphik II
Komplexität des Ray-Tracings

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
cg.in.tu-clausthal.de

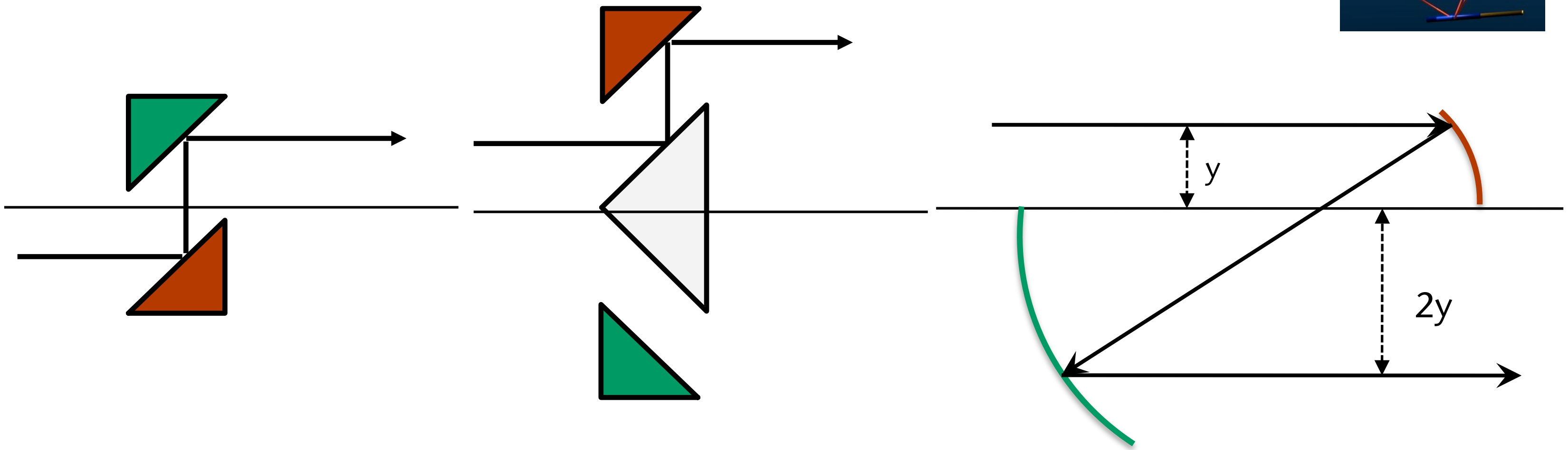
Die theoretische Komplexität des Ray-Tracings

- Definition: das abstrakte Ray-Tracing Problem (ARTP) [Reif, Tygar, Yoshida, 1994]:
  - Ein Entscheidungsproblem
  - Gegeben: ein System von idealisiert spiegelnden und brechenden optischen Elementen (keine Verluste, keine Beugung, monochrom. Licht, etc.);
  - ein Strahl (Anfangsposition & Richtung);
  - und ein Punkt P.
  - Frage: trifft der Strahl (nach endlich vielen Umlenkungen) den Punkt P?

Ein optischer Computer



- Einfache optische Elemente:



y' = y+1
analog: -1

if (y>0)

y' = 2·y
analog: ÷2

- Daraus kann man komplexe optische Elemente bauen, mit einem Eingangsfenster, und zwei Ausgangsfenster

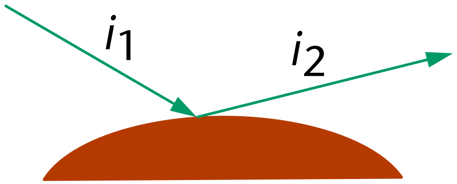
- Simulation einer Turing-Maschine (TM) mittels eines optischen Computers:
  - Ein komplexes Element = ein Zustand einer Turing-Maschine
  - Das Ausgangsfenster, durch das der Lichstrahl das komplexe Element verläßt, entspricht dem nächsten Zustand der TM
  - Binärzahl auf dem Band → Lichtstrahl mit Koordinaten $x,y \in [0,1]$
- Satz (o. Bew.):
  Das ARTP ist unentscheidbar!

- Einschränkung des ARTP:
  - Nur Spiegel die senkrecht zu einer Koordinatenachse stehen

- Satz (o. Bew.):
  Dieses eingeschränkte ARTP ist in PSPACE!

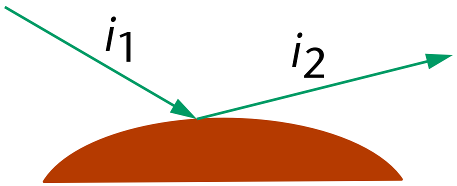
Komplexität des Ray-Tracings realistischer Szenen [Isobe,.., Shizuya, 2005]

- Definition (informell): realistische Szene
  - Alle Strahlgänge haben eine Intensität $i \in \mathbb{N}$
  - Intensitäten sind auf allen möglichen Strahlgängen monoton fallend:

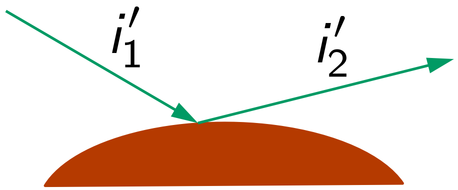


$$\Rightarrow \quad i_2 \leq i_1$$

  - Alle Objekte haben eine monotone Reflexionscharakteristik:



$$\Rightarrow$$



mit $\quad i'_1 \geq i_1 \;\wedge\; i'_2 \geq i_2$

- Definition: das abstrakte Ray-Tracing Problem in diesem Kontext:
  - Ein Entscheidungsproblem
  - Gegeben: eine realistische Szene;
  - zwei ausgezeichnete Objekte *S* und *R*;
  - ein $e > 0, e \in \mathbb{N}$.
  - Frage: Gibt es einen Strahlgang von *S* nach *R*, so daß eine Intensität > *e* dort eintrifft?
- Achtung: Darstellung im Folgenden läßt einige technische Details weg!

- Annahme: man kann zu jedem Tripel von Objekten O_1, O_2 , O_3 der Szene in polynomieller Zeit entscheiden, ob es einen Strahlgang $O_1 \rightarrow O_2 \rightarrow O_3$ gibt.

- Satz (o. Bew.):
  Das ARTP ist, mit obiger Annahme, in polynomieller Zeit bzgl. der Anzahl der Objekte der Szene lösbar.

- Beweisidee:
  Algorithmus, der auf dynamischem Programmieren beruht, und ähnlich wie Dijkstra's Algo für *shortest paths* funktioiniert.

Average-Case Komplexität des Ray-Shootings

- Annahme: wir verwenden Gitter als Acceleration Data Structure
  - Andere DS gehen analog, nur mühsamer
- Annahme: alle Objekte = Kugeln mit Radius r
- Frage: Wie groß ist die erwartete Anzahl Strahl-Kugel-Schnittests bis zum ersten Schnitt
- Bezeichnungen:

$S(n)$ = erwartete Anzahl Schnittests

n = Anzahl Kugeln in der Szene

Der Poisson'sche Punktprozeß

- Definition: uniforme Verteilung von Punkten im Raum

  n Punkte $P_1, \ldots, P_n \in X \subseteq \mathbb{R}^3$ heißen uniform in X verteilt, wenn für beliebiges $A \subseteq X$ gilt

  $$P[P_i \in A] = \frac{|A|}{|X|}, \; 1 \leq i \leq n$$

  wobei $|A| = \mathrm{Vol}(A)$.

- Definition: homogener Poisson'scher Punktprozeß

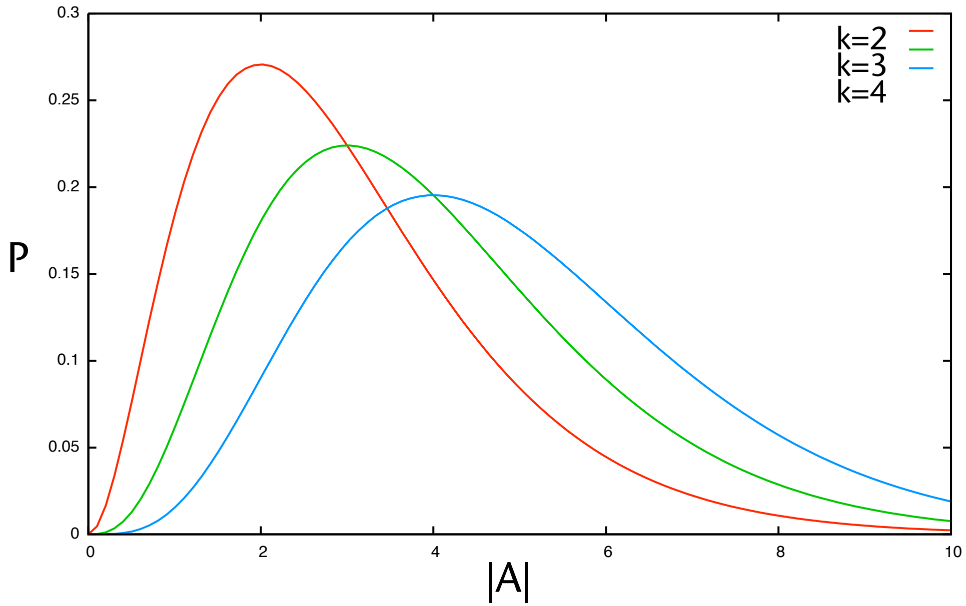
  Ein Prozeß, der gemäß obiger Definition Punkte uniform verteilt im Raum erzeugt, und für den gilt

  $$\lim_{n,|X|\to\infty} \frac{n}{|X|} = \rho \geq 0,$$

  d.h., die Dichte der Punkte ist konstant, heißt homogener Poisson'scher Punktprozeß.

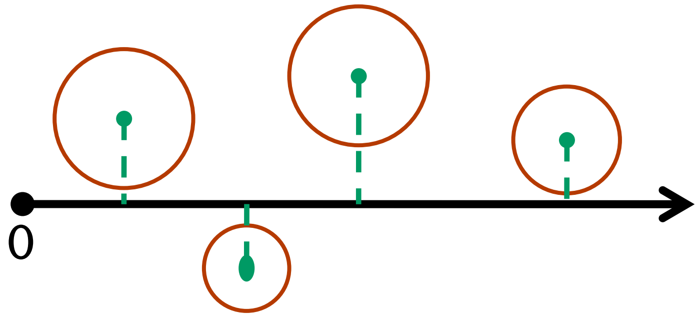
- Satz (o. Bew.):
  Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$, $N(A)$ = Anzahl Punkte in A
  Dann gilt:

$$P[N(A) = k] = \frac{(\rho|A|)^k}{k!} e^{\rho|A|}, \; k \geq 0$$

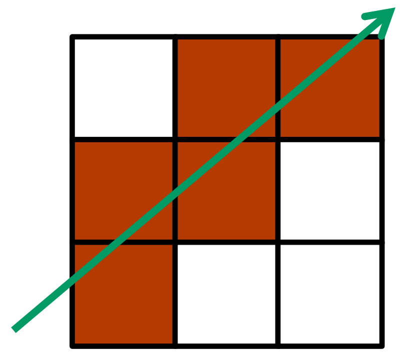


Vereinfachende Annahmen zur Analyse

- Annahme im Folgenden: zu jedem Strahl bekommen wir in erwarteter Zeit $O(S(n))$ eine Sortierung der zu testenden Kugeln entlang des Strahls



- Gitter ergibt ungefähre Sortierung der zu testenden Kugeln entlang des Strahls
  - Macht man während der Traversierung des Gitters implizit

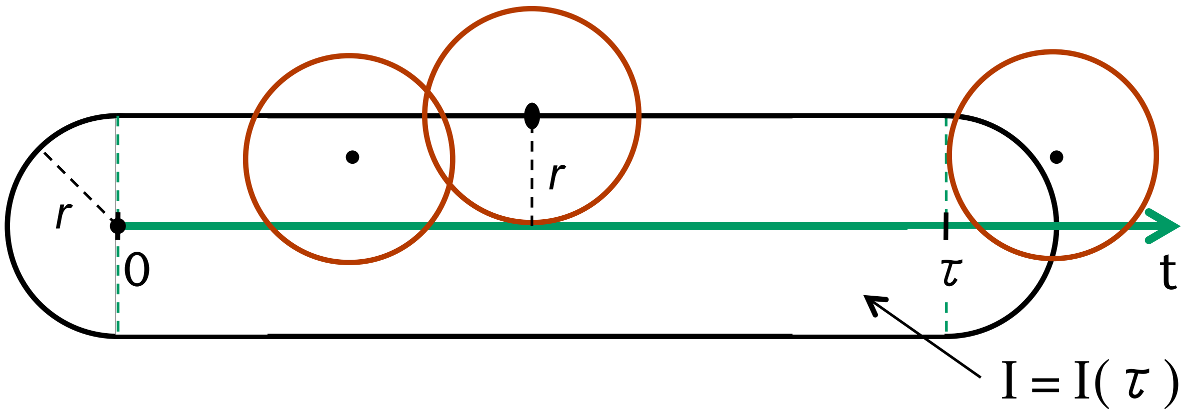


- Bemerkung: die Erzeugung dieser ungefähren Sortierung benötigt erwartete Zeit $O(S(n))$

- Erinnerung: $S(n)$ = Anzahl getesteter Kugeln
- Sei: $S'(n)$ = Anzahl umsonst getesteter Kugeln
- Klar: $S(n) = S'(n) + 1$
- Frage: $S'(n) = ?$

Zwischenziel: Anzahl Punkte in einem Makkaroni

- Ziel: bestimme F(τ) = Wahrscheinlichkeit, daß es einen Schnitt zwischen Strahl und einer Kugel mit $t \leq \tau$ gibt
- Der Raum aller Kugeln, mit Schnitt $t \leq \tau$:



(Zylinder mit Kugelhälften als Kappen)

- Vereinfachung: vernachlässige die Kugelkappen
  - Ändert am Ergebnis nichts wesentliches, wie man im Verlauf sehen wird
- Volumen: $|I| = \pi r^2 \tau$

- Wahrscheinlichkeit, dass sich kein Kugelmittelpunkt in I befindet , ist:

$$P[t_0 > \tau] = e^{-\rho|I|}$$

wobei t_0 = erster Schnittpunkt, ρ = Dichte der Kugelmittelpunkte

- Behauptung einfach nachrechnen:

$$P[t_0 > \tau] \;=\; 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P[N(I) = k] \;=\; 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho|I|)^k}{k!} e^{-\rho|I|}$$

$$= \ldots = 1 - e^{-\rho|I|}(e^{\rho|I|} - 1) = e^{-\rho|I|}$$

- Daraus bekommt man die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion

$$F(\tau) = P[t_0 \leq \tau] = 1 - P[t_0 > \tau] = 1 - e^{-\rho|I|}$$

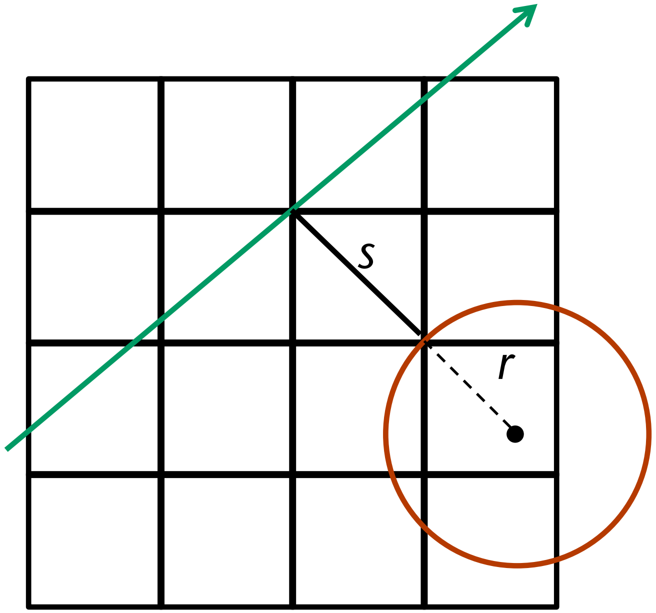
- Berechne daraus die Dichtefunktion f(τ) (*probability density function*, PDF), daß es einen Schnitt bei genau $t_0 = \tau$ gibt

$$f(\tau) = F'(\tau) = \rho|I|e^{-\rho|I|}$$
$$= \rho\pi r^2 \tau e^{-\pi r^2 \tau}$$

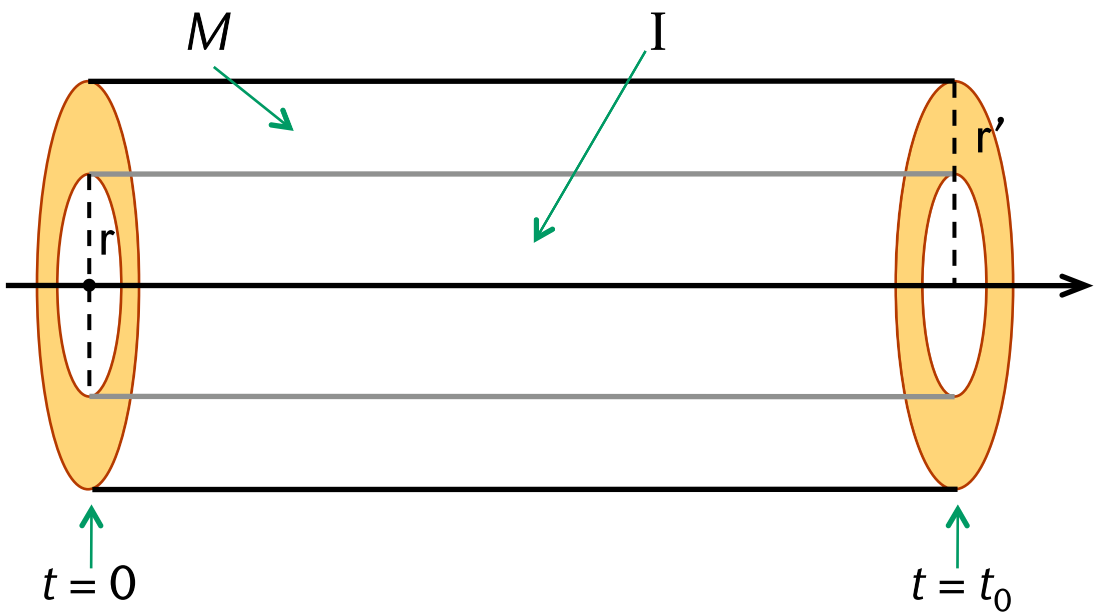
- Ziel im Folgenden: wie groß ist die Anzahl der Kugeln, die umsonst getestet werden?

Anzahl umsonst getesteter Kugeln

- Welche Kugeln werden evtl. umsonst getestet?
- Annahme: erster Schnitt bei $t = t_0$
- Also: keine Kugelmittelpunkte in $\mathrm{I}(t_0)$
- Aber: Gitter $\rightarrow$ alle Kugeln mit Mittelpunkt in einem Zylinder vom Radius $r' = r + s$ um Strahl herum werden getestet



- Wie sieht die Region im Raum aus, die Kugelmittelpunkte enthält, die umsonst getestet werden?



$$|M| = \pi r'^2 t_0 - \pi r^2 t_0 = ((s+r)^2 - r^2)\pi t_0$$

- Wahrscheinlichkeit, daß k Punkte in M liegen, bei bekanntem ersten Schnittpunkt:

$$P[t = t_0 \wedge N(M) = k] = \frac{(\rho|M|)^k}{k!} e^{-\rho|M|}$$

- Wahrscheinlichkeit, daß k Punkte in M liegen, bei nicht bekanntem ersten Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} P[N(M) = k] &= \int_{t=0}^{\infty} P[t_0 = t \wedge N(M) = k] \cdot f(t) dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \rho|I| \cdot e^{-\rho|I|} \cdot \frac{(\rho|M|)^k}{k!} e^{-\rho|M|} dt \\ &= \ldots \\ &= (1-q)^k \cdot q \end{aligned}$$

geometrische Verteilung mit

$$q = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

- Zusammenfassung: die Wahrscheinlichkeit, daß k Kugeln umsonst getestet werden, ist

$$U(k) = (1-q)^k \cdot q$$

- Die mittlere Anzahl umsonst getesteter Kugeln ist

$$S(n) = E[U(k)] = \frac{1}{q} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \left(1 + \frac{s}{r}\right)^2$$

mit r = Kugelgröße und s = Zellendiagonale

- Achtung:

$$S(n) \in O(1)$$