Prof. G. Zachmann
D. Mohr

TU Clausthal
Institut für Informatik
11. Januar 2012

Wintersemester 2011/12

Übungen zu Computergraphik I - Blatt 9

Abgabe am 18. 01. 2012

Aufgabe 1 (Euler-Winkel, *2+1 Punkte*)

Wir nehmen für Euler-Winkel (α, β, γ) die Konvention an, dass zuerst α um die globale X-Achse rotiert, dann β um die globale Y-Achse, dann γ um die globale Z-Achse. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass zu diesen Rotationen die folgenden Rotationsmatrizen gehören:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Gesamtmatrix für den Fall, dass β 90 Grad beträgt. (Sie benötigen die trigonometrischen Identitäten

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \tag{1}$$
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \tag{2}$$

b) Welcher Fall liegt hier offensichtlich vor?

Aufgabe 2 (Quaternionen, *2 Punkte*)

a) Wenn wir ein Quaternion q so darstellen: $q = (w, \mathbf{v})$, welche der folgenden Gleichungen ist dann richtig?

$$q_1 \cdot q_2 = (w_1, \mathbf{v}_1) \cdot (w_2, \mathbf{v}_2) = (w_1 w_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \tag{3}$$
$$q_1 \cdot q_2 = (w_1, \mathbf{v}_1) \cdot (w_2, \mathbf{v}_2) = (w_1 w_2 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2, w_1 \mathbf{v}_2 + w_2 \mathbf{v}_1) \tag{4}$$
$$q_1 \cdot q_2 = (w_1, \mathbf{v}_1) \cdot (w_2, \mathbf{v}_2) = (w_1 w_2 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2, w_1 \mathbf{v}_2 + w_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \tag{5}$$

(Hier soll $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$ das übliche Skalarprodukt von Vektoren sein.)

b) Sei q ein Einheitsquaternion. Zeigen Sie, dass q und $-q$ die selbe Rotation repräsentieren.

   (Bemerkung: um Eindeutigkeit herzustellen (vor allem auch in einer Quaternionen-Library) führt man darum oft die zusätzliche Nebenbedingung ein, dass $w > 0$.)

c) Zeigen Sie, dass tatsächlich $|q|^2 = q \cdot q^*$ gilt (wie in der Vorlesung behauptet).

d) Zeigen Sie, dass $|(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{r})| = 1 \Leftrightarrow \|\mathbf{r}\| = 1$.

e) Geben Sie die Anzahl Float-Multiplikationen an, die man benötigt, um einen Vektor entweder mittels einer 3×3-Matrix zu rotieren, oder mittels eines Quaternions.

   (Bemerkung: die Hintereinanderausführung (Chaining) zweier Rotationen mittels Matrix bzw. Quaternion benötigt 27 bzw. 16 Multiplikationen.)

Aufgabe 3 (Transformationen, *3 Punkte*)

Schauen Sie sich das Applet Transformation Game [1] an.
Geben Sie die Transformationen inklusive Reihenfolge für die Level 5, 14 und 18 an.

Aufgabe 4 (Projektionen, *2+2 Punkte*)

Gegeben sei die Projektionsmatrix P_1 aus der Vorlesung (Folie 23) mit den Parameterwerten:

$$l = -3,\ r = 3,\ b = -2,\ t = 1,\ n = -1,\ f = -11 \tag{6}$$

a) Geben Sie die Projektionsmatrix nach Einsetzen der Parameter an. Auf welche Punkte werden die 3D Koordinaten $\mathbf{x}_1 = (-1, -1, -6)$ und $\mathbf{x}_2 = (1, 2, -10)$ projiziert? Geben Sie ebenfalls die projizierten Punkte sowohl in homogenen Koordinaten als auch nach der Division durch w an.

b) Welche 3D-Koordinaten werden auf die Punkte $A = (-1, -1, -1)$, $B = (1, 1, 1)$ und $C = (0, 0, 0)$ abgebildet? (M.a.W., welches sind die Urbilder zu A, B, C?)

   Begründen Sie Ihre Angaben!

[1] `http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/repository/edu/brown/cs/exploratories/applets/transformationGame/transformation_game_guide.html`