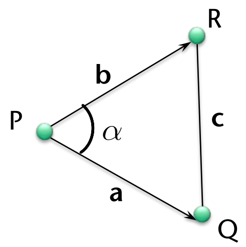
Flächeninhalte

- Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2}\,\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|\,\sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2}\,\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$



- Erweiterung: Flächeninhalt mit Vorzeichen

$$A(\triangle PQR) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| & , \; P, Q, R \text{ gegen Uhrzeigersinn} \\ -\frac{1}{2}\,\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| & , \; P, Q, R \text{ im Uhrzeigersinn} \end{cases}$$

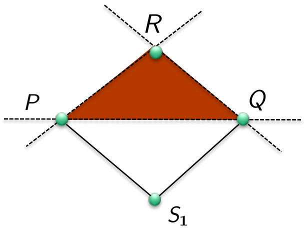
- Bezeichnung: $\square PQRS$ = Viereck (*quadrangle, quadrilateral*)

- Satz:

  Sei PQR ein Dreieck und S ein beliebiger Punkt in derselben Ebene.
  Dann gilt:

$$A(\triangle PQR) = A(\triangle SPQ) + A(\triangle SQR) + A(\triangle SRP)$$

- Beweis:
  - Fall: S liegt im Inneren des Dreiecks
    $\rightarrow$ Behauptung ist klar

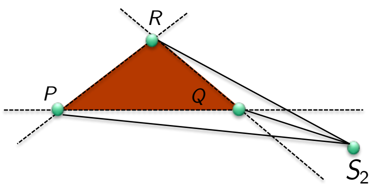


  - Also: S liege außerhalb des Dreiecks
  - Annahme: $S = S_1$
  - Dann ist $A(\triangle SPQ) < 0$
  - Klar ist:

$$A(\triangle PQR) = A(\square PSQR) + A(\triangle SQP)$$

$\Rightarrow$ Behauptung

- Annahme: $S = S_2$
- Dann ist $A(\triangle SPQ) < 0$
  und $A(\triangle SQR) < 0$
  und $A(\triangle PQR) = A(\triangle SRP) - A(\triangle SQP) - A(\triangle SRQ)$
  $\Rightarrow$ Behauptung



- Falls S in einer der anderen Regionen liegt, folgt die selbe Behauptung durch Umbenennen der Ecken des Dreiecks

- Der Flächeninhalt als Determinante:

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} P_x & P_y & 1 \\ Q_x & Q_y & 1 \\ R_x & R_y & 1 \end{pmatrix}, \quad P, Q, R \in \mathbb{R}^2$$

- Beweisskizze:
  - P, Q, R in $\mathbb{R}^3$ einbetten mit jew. z = 0
  - Determinante ausrechnen und mit der z-Komponente von

$$(Q-P)\times(R-P)$$

vergleichen

- Definition (Ohr):
Sei $V^1, \cdots, V^n$ ein überschneidungsfreies Polygon in einer Ebene. Eine Ecke V^i heißt "Ohr" gdw. die Strecke $V^{i-1}V^{i+1}$ komplett im Inneren des Polygons liegt.

- Satz (ohne Beweis):
Jedes überschneidungsfreie Polygon in einer Ebene hat mindestens 2 Ohren.

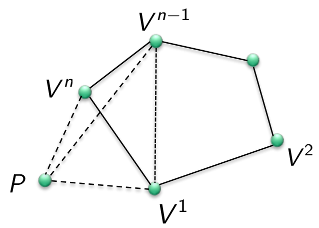
- Satz (Fläche eines Polygons):
Für jedes geschlossene, überschneidungsfreie Polygon $V^1, \cdots, V^n$ und einen beliebigen Punkt P in der Ebene gilt:

$$A(\text{Polygon}) = \sum_{i=1}^{n} A(\triangle P V^i V^{i+1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_x^i V_y^{i+1} - V_y^i V_x^{i+1}$$

- Beweis: Teil 1
  - Induktionsanfang: $n = 3$
    Aus Satz auf Seite 21 $\Rightarrow$

$$A = A(PV^1V^2) + A(PV^2V^3) + A(PV^3V^1)$$

- Induktionschritt: $n > 3$
  o.B.d.A. ist V^n = Ohr
  (sonst die V^i umnummerieren)
  Nun gilt:



$$A = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-2} A\left(PV^iV^{i+1}\right) + A\left(PV^{n-1}V^1\right)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} + \underbrace{A\left(V^1V^{n-1}V^n\right)}_{\shortparallel}$$

$$A\left(PV^1V^{n-1}\right) + A\left(PV^{n-1}V^n\right) + A\left(PV^nV^1\right)$$

$\Rightarrow$ Behauptung

- Beweis Teil 2:

$$A(PV^iV^{i+1}) = \text{z-Komponente von } \frac{1}{2}(V^i{-}P)\times(V^{i+1}{-}P)$$

Wähle P = 0 $\Rightarrow$

$$A(PV^iV^{i+1}) = \text{z-Komponente von } \frac{1}{2}V^i\times V^{i+1}$$

$\Rightarrow$ Behauptung

Geometrische Prädikate (Tests)

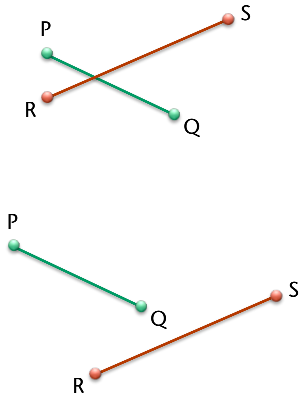
- Frage: sind zwei Kanten $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ parallel?
- Lösung:
  - $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow (Q-P)\times(S-R)=0$
  - $\overline{PQ}$ parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow \frac{(Q-P)}{\|(Q-P)\|}\cdot\frac{(S-R)}{\|(S-R)\|}=1$
- Beachte die numerische Robustheit!

- Frage: schneiden sich zwei koplanare Kanten?
- Das Prädikat: " $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ schneiden sich" kann man mathematisch so fassen:

$$(\overline{PR} \times \overline{PQ}) \cdot (\overline{PQ} \times \overline{PS}) > 0$$

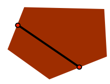
und

$$(\overline{RQ} \times \overline{RS}) \cdot (\overline{RS} \times \overline{RP}) > 0$$

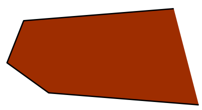


Konvexität

- Definition Konvexität (eine von vielen möglichen):
  Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ist konvex $\Leftrightarrow$
  für alle $P_1, P_2 \in G$ die gesamte Linie $\overline{P_1 P_2} \subseteq G$ ist.



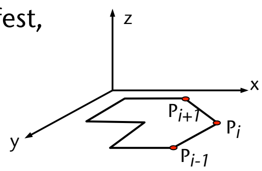
- Bemerkung:
  - Das Gebiet muß nicht beschränkt sein
  - Die Aussage "ein Polygon ist konvex" meint eigtl., daß das von dem Polygon umschlossene Gebiet (inkl. Rand) konvex ist



- Aufgabe: stelle für ein gegebenes Polygon fest, ob es konvex ist?
  - Lösung: berechne an jeder Ecke

$$\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1}\ , \quad \mathbf{v}_i = P_{i+1} - P_i$$

  und teste Vorzeichen der z-Komponente



Konstruktion eines Koordinatensystems

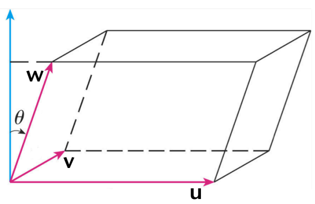
- Häufige Aufgabe:
  - Ein Vektor $\mathbf{a}$ ist gegeben (z.B. Blickrichtung)
  - Erstelle dazu eine Orthonormalbasis
- Nicht eindeutig, aber oft genügt irgendeine Orthonormalbasis
- Algo:
  1. Setze $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$
  2. Für $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ benötigen wir irgend einen Vektor $\mathbf{t}$, der nicht kollinear zu $\mathbf{w}$ ist;

     z.B. setze $\mathbf{t} := \mathbf{w}$, und ersetze die betragsmäßig kleinste Komponente durch 1
  3. Setze $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{t} \times \mathbf{w}|}$ $\quad \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$

Das Spatprodukt

- Definition:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



- Englische Begriffe:

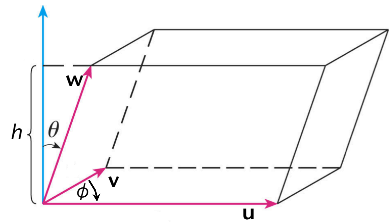
  scalar triple product, triple product, mixed product,

- Geometrische Interpretation:

$$\mathrm{Vol(Spat)} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$$

- Beweis:

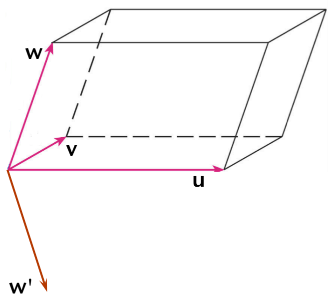
$$\begin{aligned}\mathrm{Vol(Spat)} &= \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \\ &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \Phi \, \|\mathbf{w}\| \cos \Theta \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \cos \Theta \\ &= \|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}\|\end{aligned}$$



- Erweiterung des Volumens um ein Vorzeichen:

$$\mathrm{Vol(Spat)} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

- Vol(Spat) > 0 ⇔
  u, **v**, **w** bilden ein Rechtsystem ⇔
  Winkel zwischen (**u** × **v**) und **w** < 90°

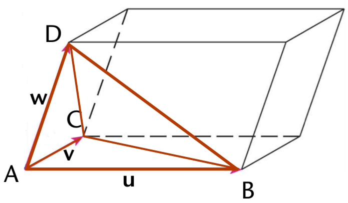


Denksportaufgabe

- Wenn man einen Würfel in Tetraeder zerschneidet, wieviele Tetraeder erhält man dann?

Das Volumen eines Tetraeders

- Es gilt:



$$\mathrm{Vol}(ABCD) = \frac{1}{6}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

$$= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \\ C_x & C_y & C_z & 1 \\ D_x & D_y & D_z & 1 \end{pmatrix}$$

Geometrische Prädikate 2

- Koplanarität:

  Drei Vektoren **a, b, c** sind koplanar ⇔

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$$

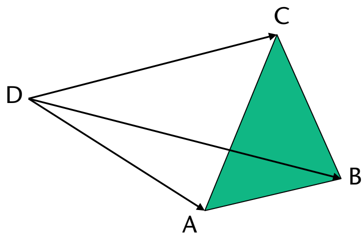
- Umlaufsinn im 3D:

  Drei Punkte A, B, C erscheinen von einem vierten Punkt D aus entgegen dem Uhrzeigersinn ⇔

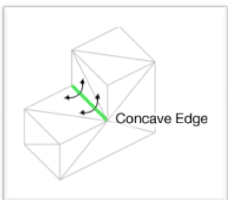
$$(A - D) \times (B - D) \cdot (C - D) < 0$$

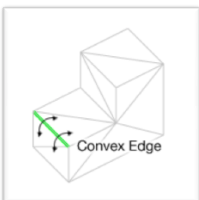
$$\Leftrightarrow \mathrm{Vol}(DACB) < 0$$

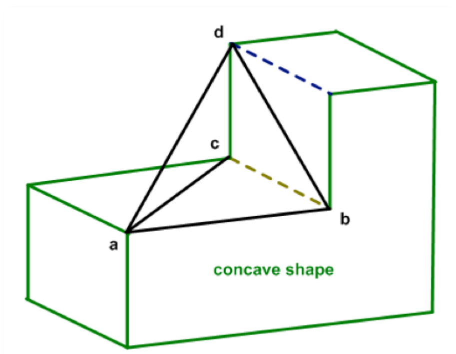
$$\Leftrightarrow \mathrm{Vol}(ABCD) < 0$$



- Test auf Konvexität / Konkavität einer Kante:





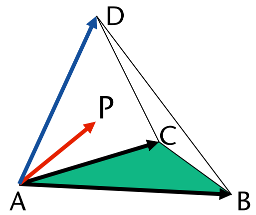


- Wann liegt ein Punkt P im Inneren eines Tetraeders?

Genau dann, wenn die Vorzeichen von

$$\mathrm{Vol}(ABCD)$$
$$\mathrm{Vol}(PBCD)$$
$$\mathrm{Vol}(APCD)$$
$$\mathrm{Vol}(ABPD)$$
$$\mathrm{Vol}(ABCP)$$

alle gleich sind!



Parametrische Geraden (*parametric line*)

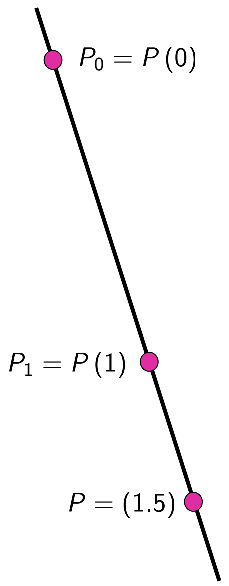
- Eine Geraden, die durch zwei Punkte geht

$$P_0 = (x_0, y_0)\,, \qquad P_1 = (x_1, y_1)$$

$$P(t) = P_0 + t\,(P_1 - P_0)$$

- Starte bei einem Punkt P_0, mache einen Schritt t entlang dieser Gerade durch P_0 und P_1

- Schreibweise: Punkte durch normale Großbuchstaben



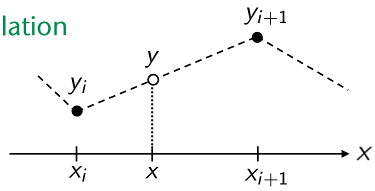
Lineare Interpolation

- Häufige Aufgabe in CG
  - Punkte, Farben, Höhen, etc., irgendwie interpolieren
- Gerade

$$p(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1-t)P_0 + tP_1$$

ist schon lineare Interpolation im n–dim. Raum

- Variante: stückweise lineare Interpolation
  - Gegeben x_i, x_{i+1} und y_i, y_{i+1} (= Höhe oder andere Semantik)
  - Gesucht y für $x \in [x_i, x_{i+1}]$
  - Lineare Interpolation:



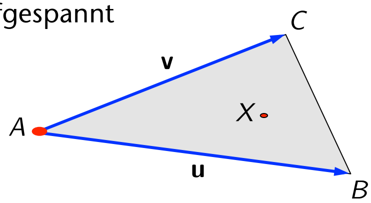
$$t := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \in [0,1] \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$y = (1-t)\,y_i + t y_{i+1}$$

Ebenen / Dreiecke

- Durch 3 Punkte wird eine Ebene aufgespannt
- Parameterdarstellung:

$$X = A + s\cdot\mathbf{u} + t\cdot\mathbf{v}$$

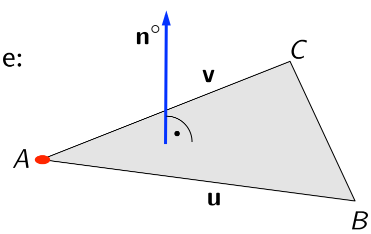


- Für Dreiecke gilt zusätzlich:

$$s, t \in (0,1), \qquad s + t \le 1$$

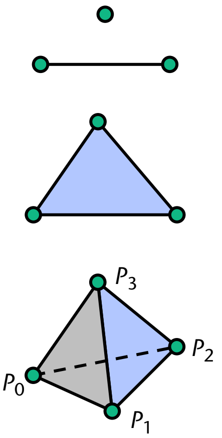
- Normale eines Dreiecks / einer Ebene:

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}$$



Exkurs: Verallgemeinerung = Simplex im $\mathbb{R}^d$

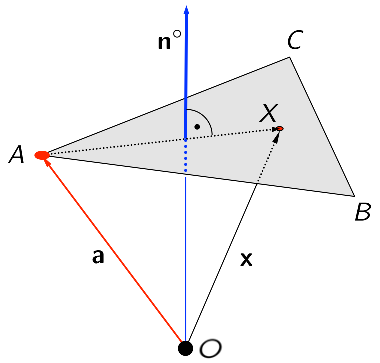
- Simplex :=
  - d + 1 affin unabhängige Punkte
  - Verbindung dieser Punkte + "Inneres"
- Beispiele:
  - 0D: Punkt
  - 1D: Linie
  - 2D: Dreieck
  - 3D: Tetraeder
- Allgemein:
  - Punkte $P_0, \ldots, P_d$
  - Simplex = alle Punkte X mit



$$X = P_0 + \sum_{i=1}^{d} s_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i = P_i - P_0, \quad s_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{d} s_i \leq 1$$

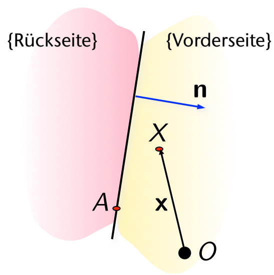
Normalenform (implizite Form)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ (X - A) \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - d &= 0 \end{aligned}$$



- Interpretation:
  - Gerade durch den Ursprung in Richtung $\mathbf{n}^\circ$
  - Jeder Punkt X ist ein Punkt der Ebene, gdw. er auf diese Gerade projiziert den gleichen Abstand vom Ursprung hat, wie die Projektion von A auf diese Gerade

- Mini-Lemma:
  Eine Ebene $(\boldsymbol{n},d)$ im $\mathbb{R}^k$ definiert
  3 Äquivalenzklassen:
  "Vorderseite" := $\{X \mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - d > 0\}$
  "Rückseite" := $\{X \mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - d < 0\}$
  Ebene := $\{X \mid \mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - d = 0\}$



- Warum ist die Beschriftung korrekt?
  - Weil

$$(X - A)\cdot\mathbf{n} = |X - A|\cdot|\mathbf{n}|\cdot\cos\theta$$