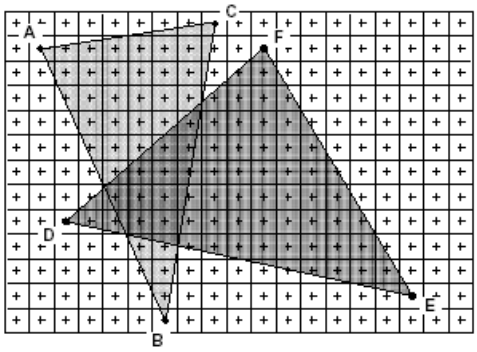
Computergraphik I
Scan Conversion of Lines

G. Zachmann
Clausthal University, Germany
zach@in.tu-clausthal.de

Einordnung in die Pipeline

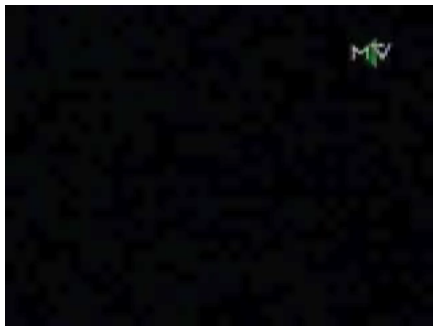
- Rasterisierung der Objekte in Pixel
- Ecken-Werte interpolieren
- (Farbe, Tiefenwert, ...)



Modell Transformation
Illumination (Shading)
Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
Clipping
Projektion (in Screen Space)
Scan Conversion (Rasterization)
Visibility / Display

Zeichnen von Linien

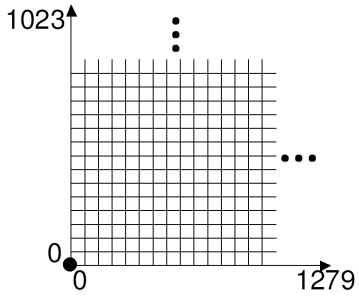
- Scan-conversion oder Rasterisierung: Bestimme welche Pixel von dem Primitiv überdeckt werden
  - Der Name kommt von der Scan-Technik der Rasterdisplays
- Algorithmus ist grundlegend für 2D und 3D Computergraphiken
- (Linien zeichnen war einfacher bei Vektor Displays ;-))



"La Linea"

Das Frame-Buffer-Modell

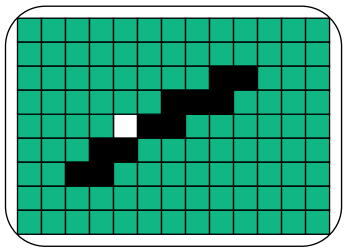
- Adressierung als 2D-Array



- Startadresse:
  - links oben (X11, Java AWT)
  - links unten (Open GL)

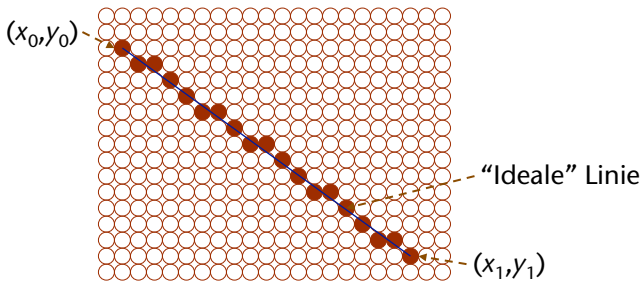
Was ist ein Pixel?

- Wir haben Ausgabegeräte mit endlicher, fester Auflösung und damit ein festes Raster
- In Wirklichkeit ist ein Pixel kein Punkt sondern ein kleines Quadrat
  - Daher der Name: *"pixel"* = *"picture cell"* oder *"picture element"*
- Und auch das ist nur eine Nährung
- Rasterisierung bedeutet:
  - Z.B. eine Linie durch kleine „Flächen“ annähern



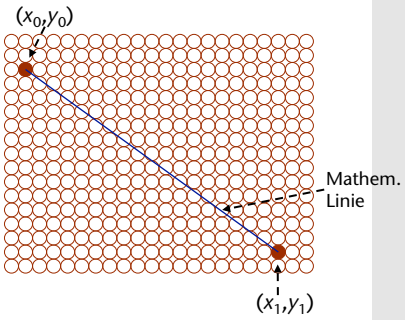
Die Ideale Linie

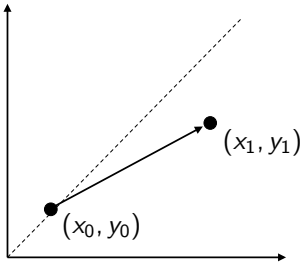
- Keine Unterbrechungen (diagonale Schritte sind erlaubt)
- Einheitliche Stärke und Helligkeit
- Fehlerfreiheit (setze nur den nähesten Pixel an der idealen Linie)
- Geschwindigkeit (wie schnell kann die Linie gezeichnet werden?)
- Invarianz gegenüber Zeichenrichtung



Die Aufgabe

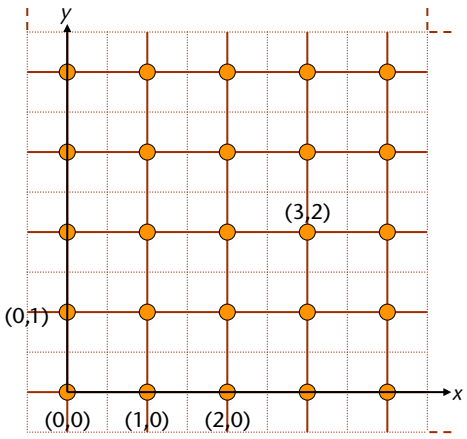
- Gegeben: Endpunktkoordinaten einer Linie
- Vereinfachungen:
  - Ganzzahlige Koordinaten
  - Geradengleichung
    y = mx +b
  - Mit $0 \leq m \leq 1$
    und $x_0 < x_1$
  - Alle übrigen Fälle bekommt man durch Vertauschen / Spiegeln
- Ausgabe: Folge von Pixeln (= rasterisierte Linie)





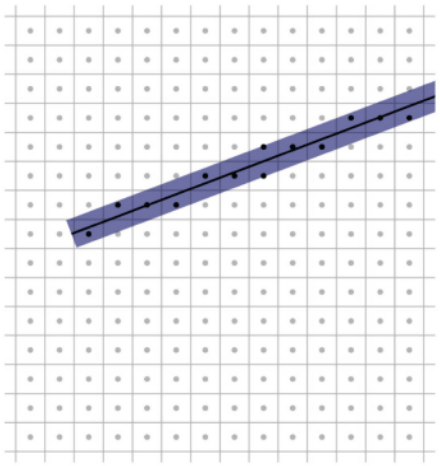
Bildschirmkoordinaten

- Wir verwenden folgende 2D Bildschirmkoordinaten
  - Ganzzahlige Werte für Mittelpunkte der Pixel
  - Senkrecht = Y–Achse, Horizontal = X–Achse

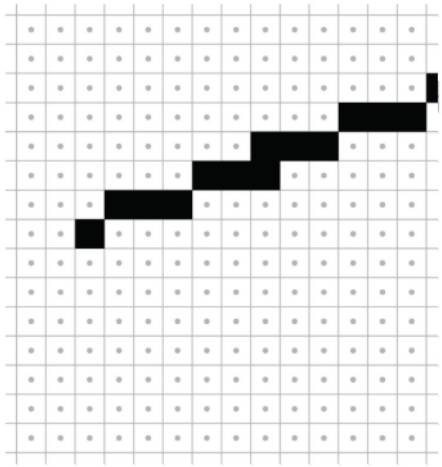


Erster Versuch der Scan-Konv. einer Linie

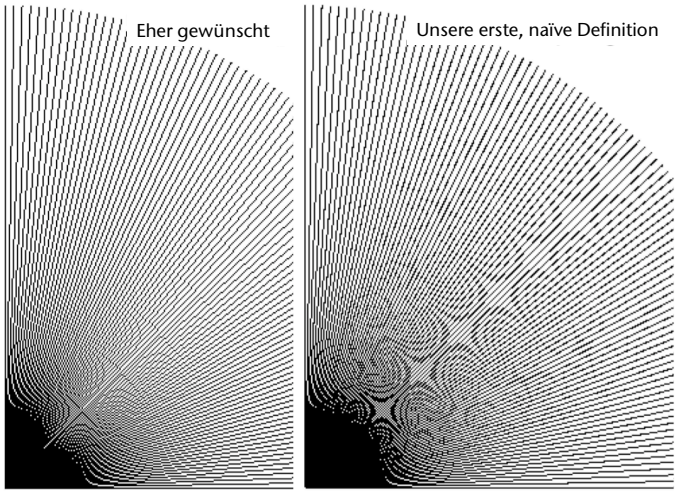
- Betrachte Linie als schmales Rechteck
- Zeichne alle Pixel, deren Zentrum im Inneren liegt



- Betrachte Linie als schmales Rechteck
- Zeichne alle Pixel, deren Zentrum im Inneren liegt
- Problem: manchmal werden übereinander liegende Pixel gesetzt → unterschiedliche scheinbare Linienstärke



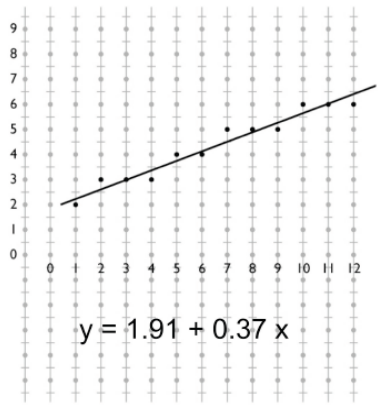
- Problem:



Erster einfacher Algorithmus

- Einfacher Algorithmus: werte Gleichung der Linie pro Spalte (x-Koord.) ein Mal aus

```
for x = ceil(x0) .. floor(x1):
    y = b + m*x
    setPixel( x, round(y) )
```

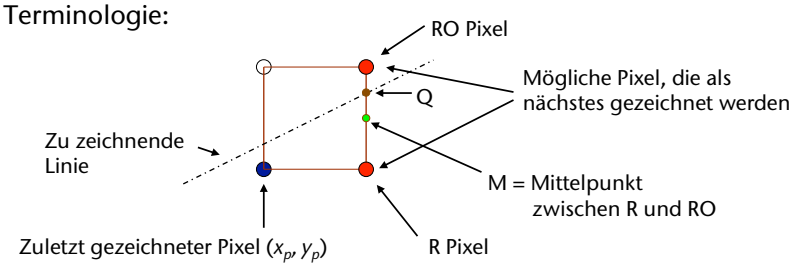


- Problem: Floating-Point, Mult. und Runden sind (rel.) langsam

Clip from Bresenham's Keynote at WSCG'03

Der Midpoint-Algorithmus

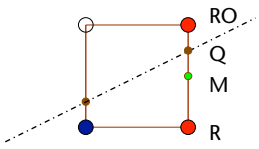
- Bei jedem X-Schritt gibt es nur zwei Möglichkeiten für die Y-Koordinate:
  - entweder bleibt die Y-Koord gleich;
  - oder die Y-Koord erhöht sich um genau 1 Pixel
- Terminologie:



  - Q = Schnittpunkt der Linie mit Gridline $x_p + 1$

Zwei Varianten

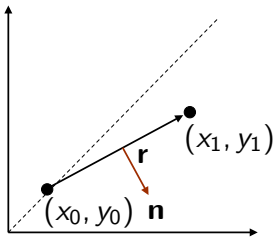
- Ursprünglich "Bresenham-Algorithmus" [1962]:
  - Bestimme Distanz zwischen RO und Q und zwischen R und Q
  - Bestimme Differenz zwischen den Distanzen
  - Vorzeichen des Ergebnisses legt fest, welcher Pixel eingefärbt wird
- Heute Midpoint-Algo:
  - Bestimme, auf welcher Seite der Linie liegt Mittelpunkt M
  - M = oberhalb → färbe Pixel R
  - M = unterhalb → färbe Pixel RO



- Wie kann man einfach bestimmen, auf welcher Seite der Linie man sich befindet?
- Verwende implizite Form der Linie:

$$F(x,y) := \mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \text{Richtungsvektor}$$



$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ x_0 - x_1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad \text{ist senkrecht dazu}$$

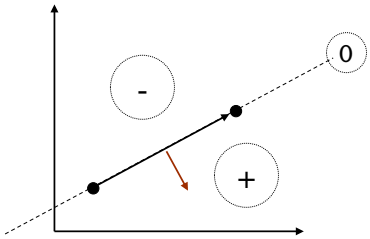
$$F(x_0, y_0) = 0 \text{ liefert} \qquad c = x_0 y_1 - y_0 x_1$$

- Gegeben sei (x, y). Dann ist

  F(x,y) = 0, wenn (x,y) auf der Linie liegt

  F(x,y) < 0, wenn (x,y) oberhalb der Linie liegt

  F(x,y) > 0, wenn (x,y) unterhalb der Linie liegt



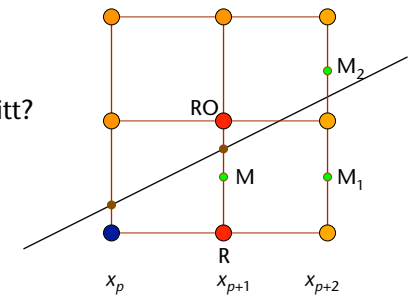
- Für den Midpoint-Algo, beachte Vorzeichen von

$$F(M) = F(x_p + 1, y_p + \tfrac{1}{2})$$

- Definiere „Entscheidungsvariable“ *d*:

$$d = F(x_p + 1, y_p + \tfrac{1}{2})$$

  - Wenn *d* > 0, färbe RO
  - Wenn *d* < 0, färbe R
- Was ist mit dem nächsten Schritt?
- Annahme:
  wir haben *d* = F(*M*)



1. Fall: R wird ausgewählt → nächstes M ist M_1

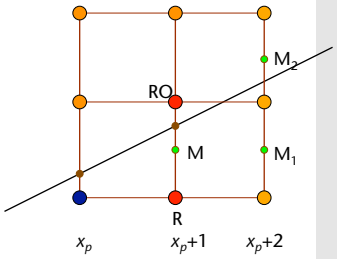
$$
\begin{aligned}
d_{old} &= F(M) \\
&= F\left(x_p + 1, y_p + \tfrac{1}{2}\right) \\
&= n_1\left(x_p + 1\right) + n_2\left(y_p + \tfrac{1}{2}\right) + c
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
d_{new} &= F(M_1) \\
&= F\left(x_p + 2, y_p + \tfrac{1}{2}\right) \\
&= n_1\left(x_p + 2\right) + n_2\left(y_p + \tfrac{1}{2}\right) + c
\end{aligned}
$$

somit

$$d_{\text{new}} = d_{\text{old}} + n_1$$



2. Fall: RO wird ausgewählt → nächstes M ist M_2

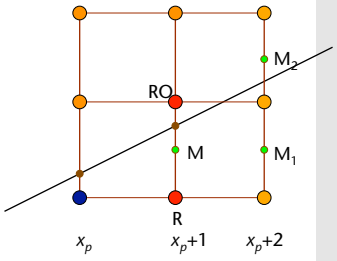
$$
\begin{aligned}
d_{old} &= F(M) \\
&= F\left(x_p + 1, y_p + \tfrac{1}{2}\right) \\
&= n_1\left(x_p + 1\right) + n_2\left(y_p + \tfrac{1}{2}\right) + c
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
d_{new} &= F(M_2) \\
&= F\left(x_p + 2, y_p + \tfrac{3}{2}\right) \\
&= n_1\left(x_p + 2\right) + n_2\left(y_p + \tfrac{3}{2}\right) + c
\end{aligned}
$$

somit

$$d_{\text{new}} = d_{\text{old}} + n_1 + n_2$$



- Pseudo-Code des Midpoint-Algo:

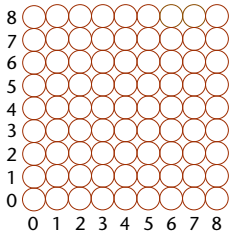
```
berechne n1, n2, c
x, y ← x0, y0
d ← F(M) = F(x0 + 1, y0 + 1/2) = n1 + n2/2
setze d1 ← n1, d2 ← n1 + n2
while x ≤ x1:
   zeichne Pixel (x,y)
   x += 1
   if d > 0:
      y += 1
      d += d2
   else:
      d += d1
```

- Achtung: in obigen Pseudo-Code ist evtl. $d = \frac{k}{2}$
  - Lösung: ...

Beispiel

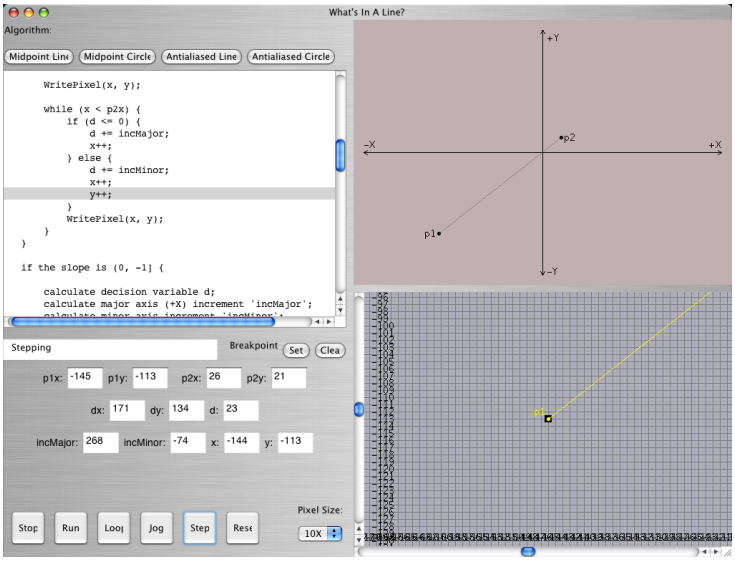
- Zeichne Linie von (1,2) nach (5,5)

```
x, y ← x0, y0
d ← F(M) = F(x0 + 1, y0 + 1/2) = n1 + n2/2
setze d1 ← n1, d2 ← n1 + n2
while x ≤ x1:
   zeichne Pixel (x,y)
   x += 1
   if d < 0:
      y += 1
      d += d2
   else:
      d += d1
```



n_1	n_2	d_1	d_2	d	x	y

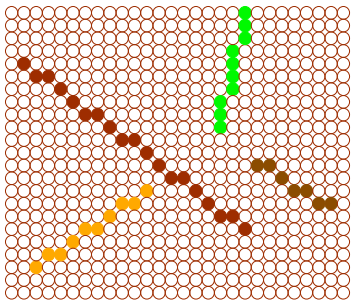
Demo

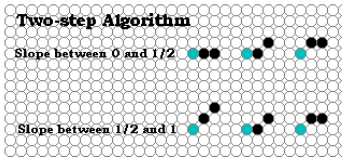


http://www.cs.rit.edu/~ncs/whatsInALine/whatsInALine.html

Geschwindigkeitssteigerung

- Sind rasterisierte Linien symmetrisch?
- Abhängig von der Länge:
  - Gerade # an Pixel → ja
  - Ungerade # an Pixel → ja, bis auf 1 Pixel
- Idee: zeichne von beiden Seiten [Rokne et al., 1990]
- Man kann 2 Pixel zeichnen mit:
  - 1 Vergleich
  - 1 Update der Entscheidungsvariable d
- Weiterhin: mit 1 Test kann man die nächsten 2 Pixel entscheiden [Wyvill et al., 1990]

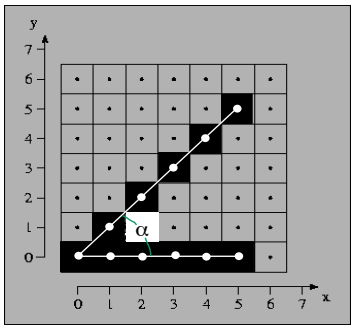




Weitere Überlegungen

- Einheitliche Stärke und Helligkeit
  - Bei gleicher Pixelzahl sind schräge Linien länger als horizontale
  - Ändere Intensität der Linie gemäß der Steigung
  - Skaliere den Grauwert um den Faktor

    $\cos(45^\circ - \alpha)\,, \quad \alpha = 0^\circ \ldots 45^\circ$



- Was ist bei gemusterten Linien? (gestrichelte Linie, etc.)

Historische Randnotiz

- Bekannt als DDA (digital differential analyzer)

MADDIDA (Magnetic Drum Digital Differential Analyzer, Northrop Aircraft) 1952

Ray-Tracing Height Fields

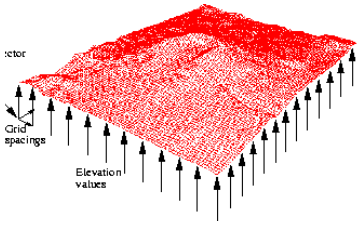
[Henning & Stephenson, 2004]

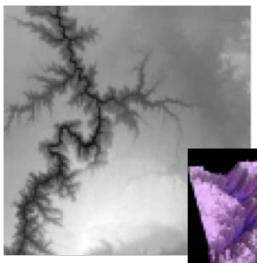
- Height Field = Alle Arten von Flächen, die sich als Funktion

$$z = f(x, y)$$

schreiben lassen

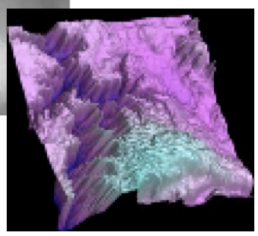
  - Z.B.: Terrain, Meßwerte über einer Ebene, 2D-Skalarfeld, ...



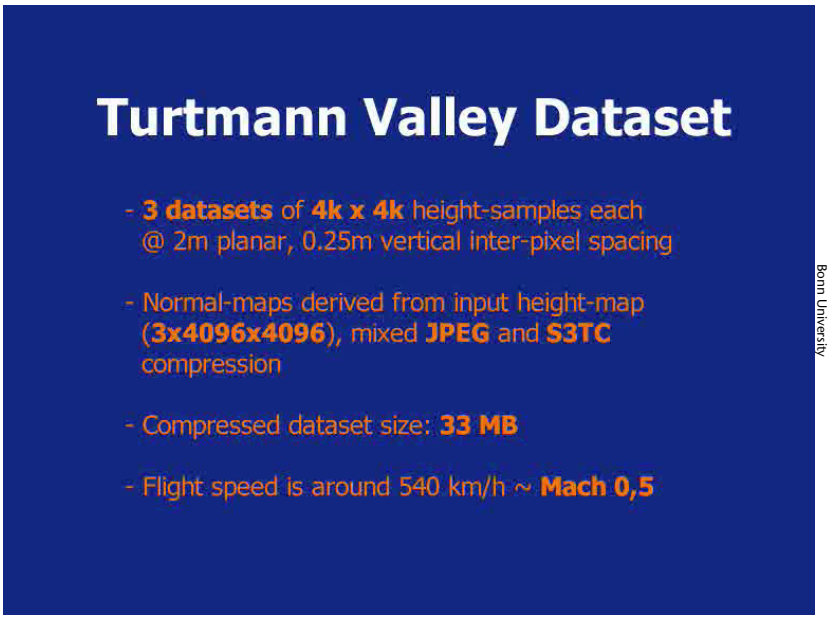


Height field
(= Bitmap)

Rendered



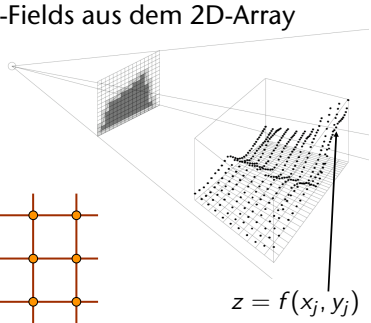
Beispiele für Terrain

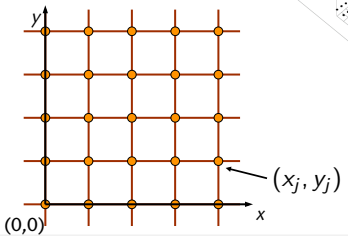


Valles Marineris, Mars - http://mars.jpl.nasa.gov

Situation

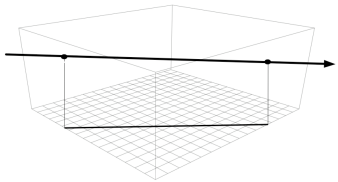
- Naïve Methode, ein Height-Field zu raytracen:
  - konvertiere in $2n^2$ Dreiecke, teste Strahl dagegen
  - Probleme: langsam, benötigt viel Speicher
- Ziel: direktes Ray-Tracing des Height-Fields aus dem 2D-Array
- Gegeben:
  - Strahl
  - Feld [0...n]x[0...n] als Float-Array
  - Höhenwerte liegen auf den Gitterknoten vor



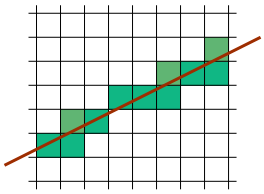


Algorithmus

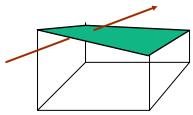
1. Dimensionsreduktion
   - Projiziere Strahl in xy-Ebene



2. Alle Zellen der Reihe nach besuchen, die vom Strahl geschnitten werden (und nur diese)
   - Ähnlich zu Scan-Conversion, aber mit zusätzlichen Zellen

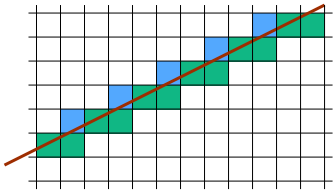


3. Strahl testen gegen das Flächenstück, das von den 4 Höhenwerten an den Ecken aufgespannt wird



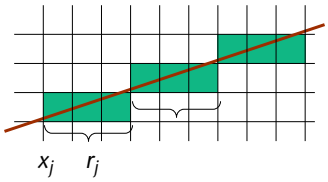
- Vereinfachungen zunächst:
  1. Betrachte (unendliche) Linien mit $y = mx$, $0 \leq m \leq 1$
  2. Betrachte nur die Folge der grünen Zellen = Zellen, die an ihrer linken Kante von der Linie geschnitten werden

- Terminologie:
  - Zelle wird identifiziert durch deren linken unteren Eckpunkt (x_j, y_j)
  - Span := Folge von Zellen mit gleicher y-Koord.
  - Länge des j-ten Spans = r_j



- Beobachtung: die diskrete Linie ist vollständig durch die Folge der Span-Längen definiert, denn

$$(x_{j+1}, y_{j+1}) = (x_j + r_j, y_j + 1)$$



- Satz (o. Bew.):

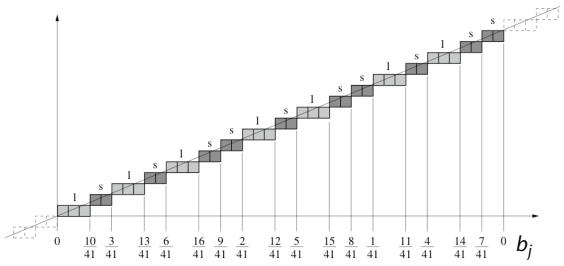
  Alle Spans der diskretisierten Linie haben nur eine von höchstens zwei verschiedenen Längen, nämlich

$$\forall j: \; r_j = r \;\vee\; r_j = r + 1$$

- Klar ist:

$$\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \;\Rightarrow\; r = 1$$

- Beispiel:



- Beobachtung: wenn wir ein seeehr langes Segment der Linie betrachten, dann gilt

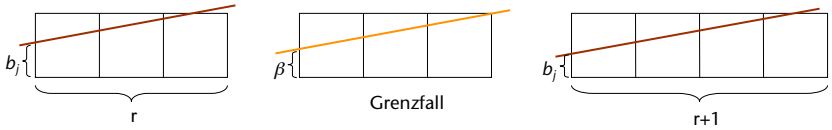
$$\frac{\#\text{ Spans}}{\#\text{ Zellen}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx m$$

- Folge: aus der Steigung kann man die Span-Länge r (bzw. r+1) berechnen:

$$\frac{1}{m} = \text{ mittlere Span-Länge}$$
$$= \text{Mittelwert von } r \text{ und } r+1 \Rightarrow$$
$$r = \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor \ , \ r+1 = \left\lceil \frac{1}{m} \right\rceil$$

- Im Folgenden: Berechnung von r_j , m.a.W., Methode zur Entscheidung, ob man einen "langen Span" oder einen "kurzen Span" hat

- Wovon hängt es ab, ob man einen langen/kurzen Span hat?



- Also: falls $b_j \geq \beta$, dann kurzer Span, sonst langer Span.
- Bestimmung von β : $b_j = mx_j - y_j$

$$b_{j+1} - b_j = mr_j - 1$$

Im Grenzfall ist $b_{j+1} = 0$ und $b_j = \beta$, also

$$\beta = 1 - mr = 1 - m \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor$$

- Das nächste b_{j+1} ist also:

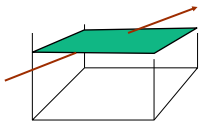
  falls kurzer Span → $b_{j+1} = b_j - \beta$

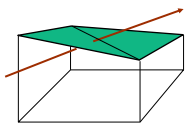
  falls langer Span → $b_{j+1} = b_j + m - \beta$

- Damit hat man einen iterativen, sehr effizienten Algo zur Aufzählung aller Zellen, die von einer Linie getroffen werden.
- Weiteres (lästiges) Detail:
  - Bei einem Strahl ist der erste Span i.A. gekürzt
  - Soll hier nicht weiter vertieft werden

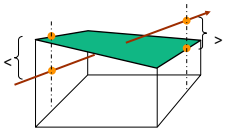
Schnitttest Strahl—Flächenstück in der Zelle

- Naïve Methoden:
  - "Nearest-Neighbor":
    - Bestimme mittlere Höhe aus den 4 Höhenwerten an den Ecken
    - Schneide Strahl gegen horizontales Quadrat mit dieser mittleren Höhe
    - Sehr ungenau
  - "2 Dreiecke":
    - Konstruiere 2 Dreiecke aus den 4 Punkten über den Ecken
    - Knick innerhalb der Zelle, Aufteilung in Dreiecke nicht klar





- Besser: "bilineare Interpolation"
  - Betrachte Fläche als parabolisches Hyberboloid
  - Bestimme Höhe am Rand über/unter dem Strahl durch lineare Interpolation
  - Vergleiche Vorzeichen
  - Bestimmt ggf. Schnittpunkt & Normale



Speedup gegenüber einfachem DDA

- O(n) bei DDA (z.B. Midpoint),
  O(n/r) mit der Span-basierten Methode,
  n = Anzahl Zellen auf dem Strahl, r = mittlere Span-Länge
- In Zahlen:
  - Ca. Faktor 2 schneller über alle Orientierungen des Strahls